
Devoir de Contrôle n° 2 ANALYSE

Problème : "Séries factorielles" :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad , \quad v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}$$

$\leadsto$ Une fonction f est dite développable en série factorielle "sur $\mathbb{R}_+^*$ " (DSF) s'il existe une suite $(a_n)_n$ de $\mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ absolument convergente pour tout $x > 0$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie I : "Preliminaire"

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} \right)$ est convergente.

(b) En déduire qu'il existe $l(x) > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x)$.

2. Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{C}$ et $x > 0$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si $\sum_{n \geq 0} a_n v_n(x)$ est AC.

★ Dans toute la suite on considère $(a_n)_n$ une suite complexe telle que $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ soit AC $\forall x > 0$.

3. (a) Montrer que la fonction $f_a : x \mapsto f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f_a tend vers 0 en $+\infty$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto u_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que:

$$\forall x > 0 \quad \left| u'_n(x) \right| \leq u_n(x) \left(\frac{1}{x} + \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) \right).$$

(b) En déduire que f_a est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Partie II : "Représentation intégrale"

5. Vérifier l'existence de réels α_i tels que $\forall x > 0, u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{x+k}$. Exprimer α_k en fonction de k et n .

6. Montrer que pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 (1-y)^{x-1+k} dy$ existe et expliciter sa valeur.

7. Dédurre alors que :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

On obtient alors que $f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy, \forall x > 0$.

8. (a) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n y^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 .

Soit Φ_a la somme de cette série entière sur $] -1, 1[$.

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 (1-y)^{x-1} \Phi_a(y) dy$ est définie sur $]0, +\infty[$, DSF sur ce même intervalle et égale à f_a .

Partie III : "Dérivation d'une série factorielle"

9. (a) Montrer que :

$$\forall x > 0, f'_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \Phi_a(y) \ln(1-y) dy$$

(b) Montrer que $\Psi_a : y \mapsto \Phi_a(y) \ln(1-y)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = \frac{\Psi_a^{(n)}(0)}{n!}$. Vérifier que $b_0 = 0$ et $b_n = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}$ pour $n \geq 1$.

10. Soient $x > 0$ et $N \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^N \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \right).$$

11. Montrer que, Pour tout $0 \leq p \leq N-1$ et $x > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x}.$$

12. Montrer que :

$$\forall 0 \leq p \leq N-1, \forall x > 0 \quad \sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{(p+1)^x}$$

13. En déduire que la série de terme général $\frac{b_n}{(n+1)^x}$ est AC pour $x > 0$

14. Montrer enfin que f'_a est DSF sur $]0, +\infty[$ est que $\forall x > 0, f'_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n(x)$.

15. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ est DSF sur $]0, +\infty[$ et trouver les DSF de f' et f'' .