

Examen d'Analyse
MP 2

Date : 09/05/2022

Durée : 4 heures

Nombre de pages : 4

Exercice

Soient n et k deux entiers strictement positifs. Le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ en k parties est noté $S(n, k)$. Ainsi, $S(n, n) = S(n, 1) = 1$ et $S(n, k) = 0$ si $k > n$.

On convient que $S(n, 0) = S(0, k) = 0$ et $S(0, 0) = 1$.

On admet les deux identités suivantes

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

et

$$(*) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad X^m = \sum_{k=0}^m S(m, k) H_k(X)$$

où $H_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1)$.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $S(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S(n, k) \leq (2k)^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose, lorsque ceci a un sens, $G_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^n}{j!} x^j$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j \geq 0} \frac{j^n}{j!} x^j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad G_n(x) = e^x \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^{k-j} j^n = \begin{cases} S(n, k), & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

(Remarquer que $\sum_{k=0}^n S(n, k) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} S(n, k) x^k$.)

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S(n, k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} \frac{S(n, k)x^n}{n!}$.

(b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{S(n, k)x^n}{n!}.$$

Problème

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si X est une variable aléatoire sur Ω , on note $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance respectivement.

Si x est un réel, alors $[x]$ désigne sa partie entière.

Partie I

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_k = \frac{X_k}{k}$ et $Z_{k,N} = \prod_{j=0}^{N-1} (X_k - j)$.

On suppose, uniquement dans cette partie, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi de Poisson de paramètre k .

On pourra admettre l'identité (*) de l'exercice ci-dessus.

1. Soient n et k deux entiers naturels non nuls et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que : $E(Z_{k,N}) = k^N$.

(b) Montrer que Y_k^r admet une espérance finie que l'on exprimera à l'aide d'une somme infinie.

2. Soit $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$.

(a) Montrer que

$$P(|Y_k - 1| \geq k^{-\beta}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

(b) Montrer que

$$P(Y_k \geq 1 - k^{-\beta}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

(c) Montrer que

$$\forall r > 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad (1 - k^{-\beta})^r P(Y_k \geq 1 - k^{-\beta}) \leq E(Y_k^r).$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k^N = \sum_{j=1}^N a_j Z_{k,j}.$$

4. Déduire que : $E(Y_k^N) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$.
5. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$.
- (a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1.$$

- (b) En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Y_k^r \leq (1-s)Y_k^N + sY_k^{N+1}.$$

6. (a) Montrer que $E(Y_k^r) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$.
- (b) Montrer alors que

$$\forall r > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r k^n}{n!} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k^r e^k.$$

Partie II

Dans la suite de ce problème, on suppose que tous les X_n suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $T_n = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_{n,\lambda}(x) = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}.$$

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n,\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2}$.

- Soit X une variable aléatoire discrète qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .
 - Rappeler l'espérance de X et sa variance.
 - Expliciter la fonction génératrice de X et déterminer son rayon de convergence.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Expliciter la fonction génératrice G_n de la variable aléatoire S_n .
 - Déduire la loi de S_n .
 - Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.
- Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon > 0, \forall c \geq c_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon.$$

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \quad P(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

5. Déduire que

$$i. \quad \forall x \in [0, \lambda[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq nx) = 0.$$

$$ii. \quad \forall x \in]\lambda, +\infty[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq nx) = 1.$$

6. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1, & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$$

7. Applications :

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=\lfloor n\lambda \rfloor}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$

(b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.$

Partie III

Une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ est dite nulle en dehors d'un segment s'il existe un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$.

On considère le $\mathbb{R}$ -ev défini par

$$E = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continue et nulle en dehors d'un segment}\}.$$

On définit la transformée de Laplace d'une fonction f de E par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit F le $\mathbb{C}$ -ev des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(a) Montre que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans F .

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$ pour tout $f \in E$.

(c) L'application linéaire $\mathcal{L}$ est-elle surjective ?

2. Soit $f \in E$.

Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter $\mathcal{L}(f)^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soient $f \in E$ et $x > 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f(t)dt.$$

4. Déduire que $\mathcal{L}$ est injective sur E .

5. On se propose de retrouver, autrement, le résultat de la question précédente.

Soit $f \in E$ tel que $\mathcal{L}(f) = \tilde{0}$.

(a) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(-\ln(u))u^n du = 0.$$

(b) Conclure.