



**ÉPREUVE DE PHYSIQUE
DE LA FIN DU SECOND SEMESTRE**

MP2

Mai 2022

Durée : 4h

PROBLEME 1 : TRANSFERT THERMIQUE

La première partie de ce problème rappelle certaines notions de la théorie des transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement.

La deuxième partie porte sur l'étude des transferts thermiques au sein d'un local situé dans une maison. Les échanges thermiques entre le local et les autres pièces de la maison sont négligés. Pour la paroi séparant le local de l'extérieur, on prendra en compte les transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement.

Partie I : Étude préliminaire

1. Conduction thermique

On considère un corps homogène cylindrique (figure 1) de section droite S , de longueur L , de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c , avec λ , ρ , c constants. La température du matériau ne dépend que de x et de t et sera notée $T(x, t)$. Les parois parallèles à l'axe (Ox) sont adiabatiques. On note $\vec{J}(x, t) = J(x, t)\vec{e}_x$ le vecteur densité de flux thermique. ($\vec{e}_x$: un vecteur unitaire)

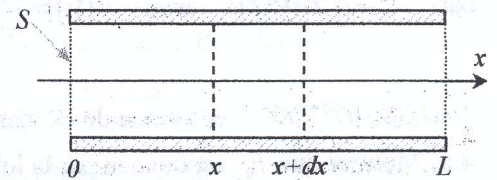


Figure 1

1.a. Que représente $\vec{J}(x, t)$? Quelle est son unité ? Énoncer la loi de Fourier.

1.b. Effectuer un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x+dx$ entre les instants t et $t+dt$ en supposant qu'il n'existe pas d'apport énergétique autre que par conduction et qu'il n'y a pas de production d'énergie interne. Donner alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$.

On se place désormais dans la suite du problème en régime stationnaire.

1.c. Donner les lois de variation $T(x)$ et $J(x)$ en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes, $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_L$.

2. Résistance thermique due à la conduction

On note P_{th} le flux thermique à travers la section droite S du matériau. La résistance thermique R_{th} de conduction du matériau de longueur L et de surface S est définie par la relation $T_0 - T_L = R_{th}P_{th}$.

2.a. Exprimer R_{th} en fonction de L , S et λ . En faisant l'analogie avec l'électrocinétique, justifier le terme de résistance thermique et préciser l'unité de R_{th} . Quelle doit être la condition sur R_{th} pour que le flux transmis soit faible ?

2.b. On associe deux corps A_1 et A_2 (figure 2) de résistances thermiques respectives R_{th1} et R_{th2} de même section S , l'un de conductivité thermique λ_1 est compris entre $x = 0$ et $x = L_1$, le second de conductivité thermique λ_2 est compris entre $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$. On note T_0 , T_1 et T_2 les températures pour $x = 0$, $x = L_1$, et $x = L_1 + L_2$. Sachant que les parois parallèles à l'axe (Ox) sont adiabatiques, établir l'expression de la résistance thermique R_h de l'ensemble en fonction de R_{th1} et R_{th2} .

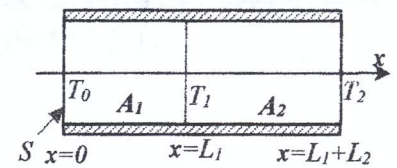


Figure 2

2.c. Même question lorsque les deux corps A_1 , de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés en parallèle (figure 3). On suppose que la température dans chaque corps ne dépend que de la seule variable x . On note T_0 , la température sur les faces d'entrée pour $x = 0$ et T_1 la température sur les faces de sorties pour $x = L_1$ pour A_1 et $x = L_2$ pour A_2 .

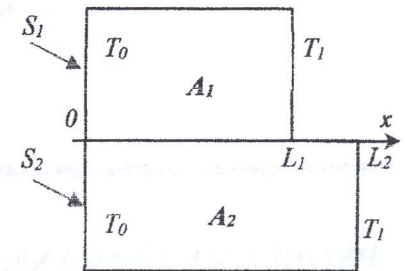


Figure 3

3. Transfert convectif

On considère une surface S à la température T , en contact avec de l'air à la température T_a et échangeant par convection avec celui-ci une puissance thermique P_c (sortant algébriquement de la surface S) s'écrivant : $P_c = h_c S (T - T_a)$ où h_c est le coefficient de convection. On remarquera que l'énergie thermique correspondante s'écoule du milieu où la température est la plus élevée vers le milieu où la température est la plus faible. Montrer que cet échange convectif est décrit par une résistance thermique de convection R_c dont on donnera l'expression.

4. Transfert par rayonnement

La puissance P_R rayonnée par unité de surface d'un corps noir et répartie sur toutes les fréquences ν est donnée

par $P_R = \int_0^\infty P(\nu) d\nu$ avec $P(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$ où $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$: constante de Planck ;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$: constante de Boltzmann ; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$: vitesse de la lumière dans le vide.

4.a. Montrer que P_R est donnée par la loi de Stefan : $P_R = \sigma T^4$. Exprimer σ en fonction de k , h et c .

On donne : $\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{\pi^4}{15}$.

4.b. On rappelle que la loi de Wien liant la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission thermique du corps noir, à sa température T s'écrit : $\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K}$. On admet que l'ensemble des couches de l'atmosphère rayonne comme un corps noir à la température $T_e = 263 \text{ K}$. Calculer les valeurs respectives des longueurs d'onde λ_{ma} et λ_{ms} du rayonnement thermique de l'atmosphère terrestre et du rayonnement thermique solaire (température de la surface du soleil T_s de l'ordre de 5700 K).

A quels domaines du spectre électromagnétique, ces longueurs d'onde appartiennent-elles ?

4.c. On considère une surface S délimitant un corps à la température T en contact avec un environnement à la température T_e . Le corps et l'environnement se conduisant comme des corps noirs, donner l'expression de la puissance $\mathcal{P}_R$ échangée par rayonnement à travers S entre le corps et l'environnement (sortant algébriquement du corps vers l'environnement).

4.d. On suppose que T est très proche de T_e et on pose $T = T_e + \Delta T$ avec $\Delta T \ll T_e$. Montrer que $\mathcal{P}_R$ peut se mettre sous la forme approchée $\mathcal{P}_R = G(T - T_e)$ et donner l'expression de G en fonction de T_e , σ et S . Déduire la résistance thermique de rayonnement R_R correspondante ?

4.e. Donner l'expression de la résistance thermique R si l'on considère à la fois un transfert par convection et par rayonnement entre un corps à la température T de surface S et un environnement à la température T_e .

Partie II : Transfert à travers un mur séparant le local de l'extérieur

On considère dans cette partie que les lois d'association des résistances thermiques vues précédemment sont vérifiées que la puissance échangée associée soit rayonnée, de nature conductive ou convective.

5. On souhaite évaluer les pertes en puissance entre un local à la température T_{int} et le milieu extérieur à la température T_{ext} . On suppose que la paroi (figure 4) séparant le local à la température T_{int} de l'air extérieur à la température T_{ext} , est constituée d'une vitre (conductivité λ , surface S , épaisseur e) et d'un mur de béton (conductivité λ_b , surface S_b , épaisseur e_b), orthogonaux à l'axe (Ox) . La paroi, le milieu extérieur et le milieu intérieur au local se comportent comme des corps noirs. Le rayonnement solaire direct n'est pas pris en compte.

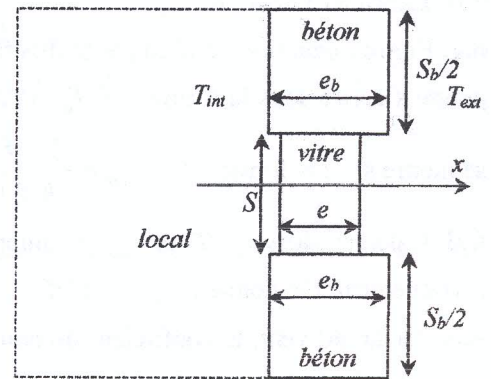


Figure 4

On considérera pour la surface de la paroi en contact avec l'extérieur, un transfert thermique par convection avec l'air extérieur, à la température $T_a = T_{\text{ext}}$ et par rayonnement avec l'ensemble des couches de l'atmosphère, à la température $T_e = T_{\text{ext}}$.

Pour la surface en contact avec l'intérieur, on considère un transfert convectif et un transfert radiatif avec l'intérieur du local. On note h_i et h_e les coefficients de convection pour la surface interne et externe de la paroi.

On donne :

$$\lambda = 1,2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad S = 2 \text{ m}^2, \quad e = 3 \text{ mm}, \quad \lambda_b = 0,9 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad S_b = 3 \text{ m}^2, \quad e_b = 0,3 \text{ m}, \quad h_i = 15 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}, \quad h_e = 35 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}, \quad T_{\text{ext}} = 273 \text{ K}, \quad T_{\text{int}} = 293 \text{ K}, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}.$$

5.a. Exprimer la résistance thermique totale R_{t1} de la partie vitrée en fonction de R_{th} la résistance thermique due à la conduction, R_{ext} et R_{int} les résistances thermiques dues à la convection et au rayonnement respectivement sur la surface en contact avec l'extérieur et l'intérieur. En déduire la puissance thermique P_{t1} sortant du local à travers la partie vitrée.

5.b. A l'aide des résultats obtenus aux questions 4.e et 2.a, calculer numériquement R_{t1} et P_{t1} .

5.c. Exprimer et calculer numériquement la résistance thermique totale R_{t2} de la partie en béton de la paroi ainsi que la puissance thermique P_{t2} à travers celui-ci. Comparer les valeurs numériques de P_{t1} et P_{t2} .

Conclusion ?

5.d. Que vaut la puissance totale P_t' si la paroi est constituée simplement d'une baie vitrée de surface $S' = 5 \text{ m}^2$?

6. Pour des raisons de luminosité, on opte pour une paroi (figure 5) entièrement constituée d'une vitre de surface $S = 5 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$. Les échanges thermiques sont de même nature que dans la question 5, sauf pour l'échange par rayonnement entre la surface extérieure de la paroi et le milieu extérieur. En effet, un modèle plus réaliste envisage que l'ensemble des couches de l'atmosphère rayonne comme un corps noir à une température $T_e = T_{\text{ciel}}$ inférieure à T_{ext} . Un chauffage fournit au local une puissance calorifique $P_0 = 1500 \text{ W}$ et on note T_1 et T_2 les températures des surfaces en $x = 0$ (surface S_1) et $x = e$ (surface S_2).

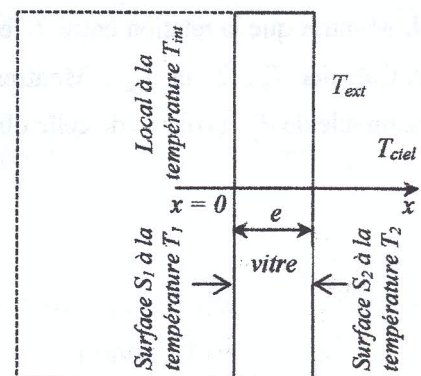


Figure 5

On désire calculer T_1 , T_2 et T_{int} en fonction de P_0 , T_{ext} , T_{ciel} et des grandeurs relatives à la conduction, à la convection et au rayonnement.

6.a. Que vaut, en régime stationnaire, le flux thermique à travers S_1 et S_2 ? En exprimant la contribution du rayonnement à la résistance thermique en fonction de T_1 , exprimer l'écart $T_{\text{int}} - T_1$.

6.b. Exprimer l'écart $T_1 - T_2$.

6.c. Ecrire l'équation vérifiée par le flux thermique s'écoulant vers l'extérieur à travers S_2 . En supposant que T_2 puisse s'écrire sous la forme $T_2 = T_{\text{ext}} + \Delta T_2$ avec $\Delta T_2 \ll T_{\text{ext}}$, montrer que l'écart de température $T_2 - T_{\text{ext}}$ peut se mettre sous la forme : $T_2 - T_{\text{ext}} = \frac{P_0 - f(T_{\text{ext}}, T_{\text{ciel}})}{h_e S + 4\sigma S T_{\text{ext}}^3}$ et donner l'expression de $f(T_{\text{ext}}, T_{\text{ciel}})$.

6.d. Calculer alors T_2 , T_1 et T_{int} . Evaluer les importances respectives de la conduction, de la convection et du rayonnement. On donne : $T_{\text{ciel}} = 263 \text{ K}$.

6.e. Par grand vent, le coefficient de convection externe peut atteindre la valeur $h_e = 60 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Que valent alors, T_2 , T_1 et T_{int} ? Conclusion.

7. Afin de réaliser des économies d'énergie, la paroi est finalement réalisée en double vitrage composé de deux vitres d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$, de surface $S = 5 \text{ m}^2$, séparées par une épaisseur $e' = 5 \text{ mm}$ d'air de conductivité thermique $\lambda' = 0,025 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Les différentes températures envisagées sont indiquées sur la figure 6.

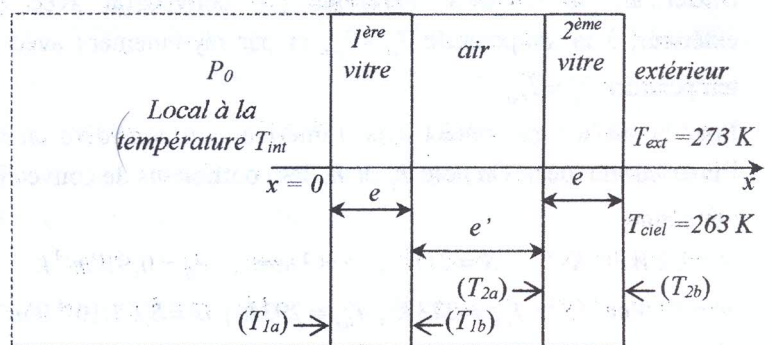


Figure 6

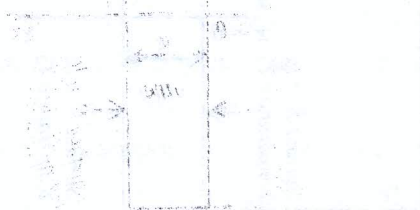
7.a. Montrer que l'on peut confondre T_{1a} et T_{1b} en s'appuyant sur les résultats des questions 6.d) et 6.e), ainsi que T_{2a} et T_{2b} . On note alors $T_{1a} = T_{1b} = T_1$ et $T_{2a} = T_{2b} = T_2$.

7.b. Les échanges thermiques sont de même nature que précédemment, mais l'on considère maintenant que chacune des vitres est assimilable à un corps noir rayonnant dans 2 demi-espaces (à la température T_1 pour la première vitre et à la température T_2 pour la seconde). Pour l'air emprisonné entre les vitres, on néglige le phénomène de convection et de rayonnement pour ne considérer qu'un transfert purement conductif. Montrer que la relation entre T_{int} et T_1 est identique au cas du simple vitrage et exprimer l'écart $T_{\text{int}} - T_1$.

7.c. Ecrire l'équation vérifiée par le flux thermique s'écoulant de la vitre 1 vers la vitre 2. En déduire T_1 en fonction de T_2 et P_0 . Quelle est la modification par rapport au cas du simple vitrage?

7.d. Montrer que la relation entre T_2 et T_{ext} est identique au cas du simple vitrage et exprimer l'écart $T_2 - T_{\text{ext}}$.

7.e. Calculer T_2 , T_1 et T_{int} . Montrer alors qu'une valeur de P_0 divisée par 2 donnerait une valeur plus raisonnable de T_{int} (voisine de celle obtenue en 6.d).



PROBLÈME 2 : DUALITÉ ONDE-CORPUSCULE ET ONDE DE MATIÈRE

En octobre 1874, le jeune Max Planck s'inscrit à l'université de Munich pour y étudier les sciences exactes, il a alors 16 ans. Quelques années plus tard, Max Planck reçoit le prix Nobel de physique en 1918 « pour avoir fondé la mécanique quantique ». Dans sa thèse de doctorat soutenue en 1924, Louis de Broglie postulait que toute particule de quantité de mouvement p avait des propriétés ondulatoires et que l'on pouvait lui associer une longueur d'onde donnée par la relation qui porte son nom $\lambda = \frac{h}{p}$ avec h la constante de Planck.

Depuis, plus de 120 prix Nobel ont été attribués pour des découvertes relatives au monde de la physique quantique ; ceci souligne la vitalité et l'importance de ce domaine de la physique.

Les phénomènes quantiques qui apparaissent à l'échelle microscopique sont parfois difficiles à appréhender car ils ne correspondent pas à notre intuition naturelle fondée sur notre expérience du monde macroscopique. À la base de leur compréhension se trouve l'idée de dualité onde-particule et la notion d'onde de matière.

L'objet de ce problème est d'étudier quelques expériences qui ont mis en évidence ces deux notions :

- interférences d'atomes de néon froid en 1992 ;
- expérience de Davisson et Germer en 1927 ;
- interférences de molécules de fullerènes (molécules composées de 60 atomes de carbone) en 2003

Données

- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Masse molaire du néon : $M(\text{Ne}) = 20 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire du carbone : $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$

Partie I : Interférences d'atomes de néon froid

En 1992, une équipe japonaise a réalisé une expérience d'interférences atomiques. Le dispositif expérimental utilise des atomes de néon piégés et refroidis par laser à une température de $2,5 \text{ mK}$ de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne. Lorsque ces atomes quittent le piège, ils tombent dans le champ de pesanteur et sont alors en chute libre. Le piège est situé à une hauteur $\ell = 76 \text{ mm}$ au-dessus de deux fentes d'Young de largeur $b = 2,0 \mu\text{m}$ séparées de la distance $a = 6 \mu\text{m}$. Un écran MPC (Microchannel Plate Detector) situé à la distance $D = 113 \text{ mm}$ de la double fente détecte les atomes de néon avec une résolution de l'ordre de $20 \mu\text{m}$.

On note m^* la masse d'un atome de néon.

1. Comment se manifestent sur l'écran d'observation les caractères corpusculaires d'une part et ondulatoire d'autre part des atomes de néon ?

2.a. Calculer la vitesse v_f avec laquelle les atomes de néon atteignent les fentes de Young (on supposera leur vitesse initiale négligeable).

2.b. En déduire la valeur de la longueur d'onde de de Broglie λ associée aux atomes de néon au niveau des fentes de Young. Pourquoi les atomes de néon doivent-ils être traités comme un objet quantique ?

- 2.c. Pourquoi est-il plus difficile de réaliser une telle expérience avec des atomes plutôt qu'avec des électrons ? Pourquoi utilise-t-on des atomes « froids » ?
3. Estimer la largeur de la tache de diffraction pour un atome diffracté par une des fentes et comparer à la résolution sur l'écran MPC.

Sur la figure 7, S_1 et S_2 représentent les positions des deux fentes dans le plan d'étude perpendiculaire aux fentes supposées infiniment fines. Soit un point M du plan d'observation repéré par son abscisse x . L'écran est placé loin des fentes à une distance D grande devant a et x . On s'intéresse à l'interférence en M des ondes de matière ayant traversé chacune des deux fentes.

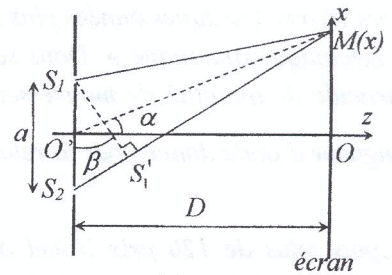


Figure 7

- 4.a. Montrer que $S_1M \approx D + \frac{(a-2x)^2}{8D}$ et $S_2M \approx D + \frac{(a+2x)^2}{8D}$ à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{2x \pm a}{2D}$.

On suppose que la longueur d'onde de de Broglie λ des atomes de néon reste constante après la traversée des fentes de Young. Déterminer en fonction de λ , D , a et x le déphasage $\Delta\varphi$ entre les ondes interférant au point M.

- 4.b. Déterminer l'expression de l'interfrange théorique i_{th} et calculer sa valeur.

5. En réalité, le calcul de l'interfrange est beaucoup plus complexe dans les conditions expérimentales citées et une étude plus approfondie donne l'expression suivante pour la même interfrange, notée i'_{th} :

$$i'_{th} = \frac{h}{m^* v_f} \frac{2D}{a} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2gD}{v_f^2}.$$

- 5.a. Quelle est la dimension du coefficient α ? Quelles grandeurs compare ce coefficient ?

5.b. Montrer que si $\alpha \ll 1$, on retrouve l'expression de la question 4.b. Commenter une telle approximation et indiquer la raison de la correction de l'interfrange.

Partie II : Expérience de Davisson et Germer : diffraction de électrons

L'expérience de Davisson et Germer est historiquement la première de la série qui prouve que les électrons ont un comportement ondulatoire, comme la lumière ou les rayons X. Elle permet aussi de vérifier quantitativement la validité de la relation de de Broglie. En bombardant une cible de nickel monocristallin par des électrons monokinétiques, Davisson et Germer ont observé un phénomène de diffraction électronique. Les électrons sont diffractés par la cible principalement dans une direction privilégiée.

On modélise le canon à électron utilisé dans l'expérience de Davisson et Germer par deux armatures de potentiel V_1 et V_2 soumises à une différence de potentiel

$U = V_1 - V_2$ et séparées par une distance d (figure 8).

On s'intéresse tout d'abord au champ créé par une seule armature assimilée à un plan infini chargé uniformément. Soit σ sa densité surfacique de charge supposée positive et indépendante du temps.

6. Déterminer la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au point M. De quelle(s) variable(s) dépend(ent) ce champ ?

7. Quelle relation existe-t-il entre $E(z)$ et $E(-z)$? Justifier.

8. Montrer que le champ électrostatique créé par cette distribution s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

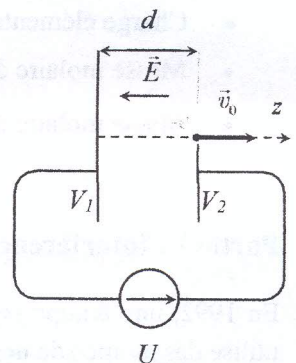


Figure 8

Le canon à électron peut ainsi être modélisé par l'association de deux plans infinis de charges opposées $+\sigma$ et $-\sigma$ placés respectivement à la cote $\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$.

9. Dédurre du résultat de la question précédente l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.

10. Montrer que l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée de charge q placée entre les armatures s'écrit : $\mathcal{E}_p = qV(z) + K$, où $V(z)$ est le potentiel électrostatique et K est une constante arbitraire que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Un électron de masse m_e de charge $-e$ est placé à l'armature négative de potentiel V_1 . On supposera que cet électron est initialement immobile. L'application de la différence de potentiel $U = V_2 - V_1 = 54V$ permet d'accélérer cet électron qui atteint une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ au niveau de l'armature positive de potentiel V_2 . Il est ensuite éjecté à travers un trou percé dans cette dernière.

11. Calculer v_0 en fonction de U , m et e . Doit-on se placer dans le cadre de la mécanique relativiste ?

12. Déterminer la valeur numérique de la longueur d'onde de de Broglie associée aux électrons de vitesse v_0 . Commenter cette valeur.

Partie III : Interférences de molécules de fullerène

En 1999, des chercheurs de l'université de Vienne montrent que la dualité onde-particule s'applique également à des molécules de telles que le fullerène C_{60} .

Le réseau utilisé est un réseau de fentes fines. On désire retrouver tout d'abord la condition d'interférences constructives, aussi appelée formule des réseaux.

Soit le cas général de rayons lumineux arrivant depuis la source S avec une incidence θ_0 sur le réseau et émergeant avec un angle θ vers un point M de l'écran repéré par son abscisse x . On suppose que le point M est infiniment éloigné et on se place dans un milieu d'indice $n=1$.

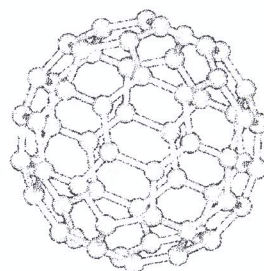


Figure 9

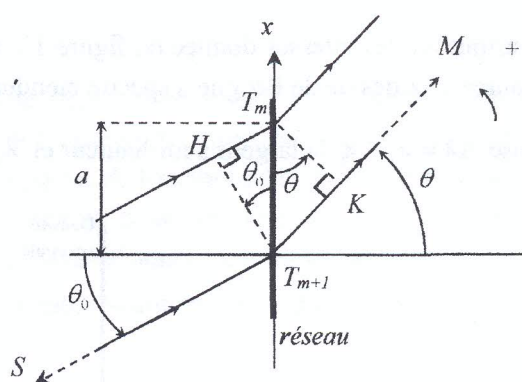
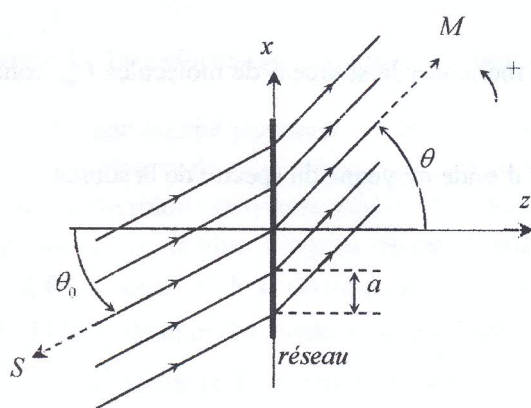


Figure 10

13. À l'aide de la figure 10, déterminer la différence de marche δ entre deux ondes passant par deux fentes consécutives T_m et T_{m+1} . En déduire la formule fondamentale des réseaux

$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda}{a} \text{ avec } k \text{ un entier relatif appelé ordre de diffraction.}$$

Pour une onde monochromatique, la représentation de l'intensité relative en fonction de la différence de phase φ entre deux rayons d'un réseau de N fentes est la suivante :

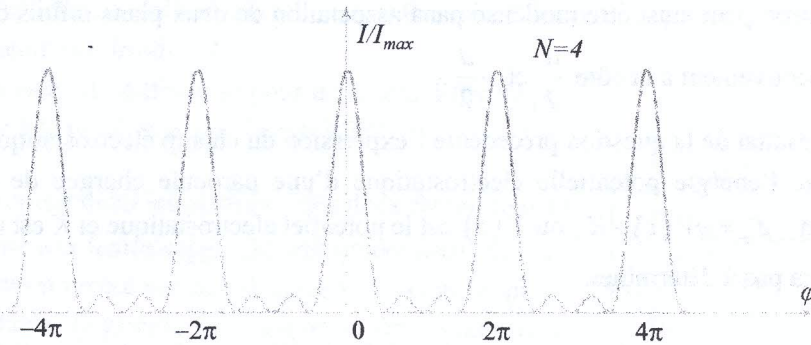


Figure 11

14. Comment évolue cette figure lorsque le nombre de fentes N augmente ?

15. Montrer qu'en incidence normale, la distance entre deux pics adjacents d'intensité maximale est donnée

par $\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$ avec x l'abscisse du détecteur (on supposera $x \ll D$).

16. La distribution de vitesse des molécules de C_{60} en sortie du four est donnée sur la figure 12. Après diffraction sur le réseau de pas $a = 100 \text{ nm}$, les molécules de C_{60} se déposent sur un écran bidimensionnel placé à une distance $D = 1,25 \text{ m}$.

Déterminer la longueur d'onde moyenne de de Broglie λ_m d'une molécule. En déduire la valeur de Δx .

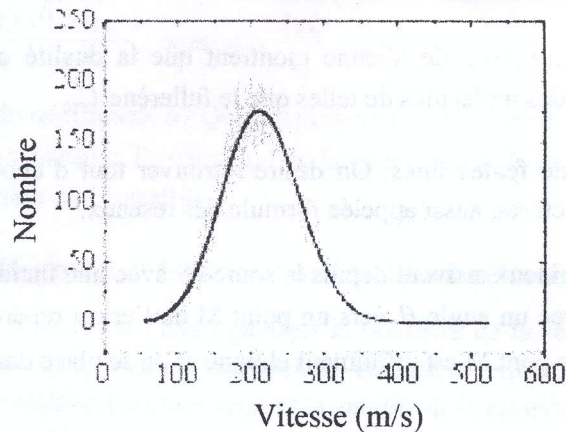


Figure 12

La distribution des vitesses donnée en figure 12, nous incite à modéliser la source S de molécules C_{60} comme une source d'ondes de de Broglie à spectre étendue (figure 13).

On pose $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ la largeur à mi-hauteur et λ_m la longueur d'onde moyenne du spectre de la source.

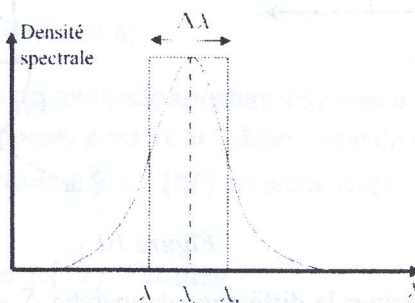


Figure 13

17. Estimer $\Delta\lambda$ à partir de la figure 12. Quelle est la conséquence d'un élargissement spectral de la source sur la répartition de l'intensité relative sur l'écran.