

Devoir de Contrôle N° 1 ANALYSE

nb de pages : 3

Problème .

On considère le $\mathbb{R}$.e.v $E = \{u = (u_n)_n, \text{ suite réelle; } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est absolument convergente}\}$

△ Toute suite ne commençant pas par le rang 0 sera complétée par des termes nuls, par exemple la suite $t = \left(t_n = \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ prendra la valeur 0 pour le terme t_0 .

Pour une suite bornée $b = (b_n)_{n \geq 0}$, on considère les applications:

$$N: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u = (u_n)_{n \geq 0} \longmapsto N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

$$N_b: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u = (u_n)_{n \geq 0} \longmapsto N_b(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n u_n|$$

et les suites :

$$r = \left(r_n = \frac{1}{n2^n}\right)_{n \geq 1}, \quad v = \left(v_n = \frac{1}{n(n+1)2^n}\right)_{n \geq 1}, \quad s = \left(s_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n \geq 1} \text{ et } a = \left(a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}\right)_{n \geq 1}$$

Partie I.

- Vérifier que r et v sont dans E et $s \notin E$.
- Montrer que N est une norme sur E .
- Montrer que N_b est une norme sur E si et seulement si $b_n \neq 0, \forall n \geq 0$.
 - Supposons que la suite $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq 0}$ est bornée. Montrer que N_b et N sont équivalentes.
- Supposons que $b_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ et $b_0 = 1$. On considère la suite $(u_k)_k$ de E tel que $u_k = (0, 0, \dots, \overset{k\text{ème}}{1}, 0, \dots)$.
 - Calculer $N(u_k)$ et $N_b(u_k)$ pour $k \geq 1$.
 - N et N_b sont elles équivalentes?
- Montrer que $N(r) - N(v) = N(v - r) = 2N(r) - 1$.
 - Vérifier que $N(v) \leq \frac{1}{2}N(r)$ puis déduire que $N(r) \geq \frac{2}{3}$.

Partie II.

1. (a) Vérifier que pour $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n r_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} dx$.
- (b) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} = \ln(2)$.
- (c) Utiliser 5)a) pour déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.
2. (a) Vérifier que $\sum_{n \geq 1} s_n$ est convergente.
- (b) Montrer que $\forall n \geq 1$ et $\forall x \in [0, 1]$: $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.
- (c) Déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = \ln(2)$.
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.
- (b) Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ est convergente. (On donne $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$).

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k$, $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} s_k$, $A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

1. (a) On pose $U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$$

- (b) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$.
- (c) Conclure que $R_n \sim \frac{1}{n2^n}$.
2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{t+1}$$

- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

- (c) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

- (d) Conclure que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.