

Examen d'Analyse N° 1

nb de pages : 4

Problème 1

Notations et définitions

- On désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ par la notation $\text{diag}(a, b, c)$. Ainsi, $\text{diag}(1, 1, 1)$ est la matrice

identité I_3 .

- L'espace vectoriel des matrices 3×3 , noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, est muni du produit scalaire usuel

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{i,j} b_{i,j}.$$

- On note $\| \cdot \|$ la norme associée : $\| A \|^2 = \langle A, A \rangle$.

- On note $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est à dire les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient : ${}^t MM = I_n$.

- Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et P est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la distance de A à P est, par définition :

$$d(A, P) = \inf_{B \in P} \| A - B \|.$$

- Si P et Q sont deux parties non vides de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la distance entre P et Q est :

$$d(P, Q) = \inf_{A \in P, B \in Q} \| A - B \|.$$

On a aussi (et on l'admettra) : $d(P, Q) = \inf_{A \in P} d(A, Q)$.

1. Si $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, calculer $\| A \|$.
2. Démontrer que $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est une partie bornée. En déduire que $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que l'application $M \mapsto \| M \|$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, est continue.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tel que : $d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \| A - U \|$.
5. Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\Phi(M) = d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

(a) Soient $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que : $\forall U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}), \quad d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq \| N - U \| + \| N - M \|$
puis que : $d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq d(N, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) + \| N - M \|$.

- (b) En déduire que Φ est continue.
6. Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $r \in \mathbb{R}^+$, on pose: $B_r = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \|M\| \leq r\}$.
- (a) Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que: $d(P, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(P \cap B_r, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.
- (b) Démontrer qu'il existe $A \in P$ telle que: $d(P, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.
7. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$.
- (a) Si $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, montrer que: $\|D - U\|^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2\right) - 2\langle U, D \rangle + 3$.
- (b) Si $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, montrer que: $\langle U, D \rangle \leq \sum_{i=1}^3 \lambda_i$.
- (c) En déduire que: $d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$.

Problème 2

Partie I

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- (a) Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

(c) Montrer que: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

(d) En déduire que: $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} dt = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

- Soient α et β deux réels strictement positifs et $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe $x_0 > 0$ tel que la fonction $t \mapsto e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} h(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (a) Soit $\eta > 0$. Montrer que pour tout $x > x_0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| &\leq \int_0^\eta e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} |h(t) - h(0)| dt \\ &+ e^{-(x-x_0)\eta^\beta} \int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} (|h(t)| + |h(0)|) dt. \end{aligned}$$

- (b) Dédurre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} h(t) dt = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) h(0).$$

3. On pose

$$\psi(t) = t - 1 - \ln(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^*.$$

(a) Vérifier que ψ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\psi(t)} dt.$$

4. On considère la fonction ψ définie dans la question précédente.

On pose

$$\begin{cases} K_1(t) = \sqrt{\psi(t)}, & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ K_2(t) = \sqrt{\psi(t)}, & \text{si } t \in]0, 1]. \end{cases}$$

(a) Vérifier que K_1 réalise une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$ et que K_2 réalise une bijection décroissante de $]0, 1]$ sur $\mathbb{R}_+$. On note g_1 (resp. g_2) la fonction réciproque de K_1 (resp. K_2).

(b) Montrer que g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x > 0, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x\psi(t)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xu^2} g_1'(u) du.$$

(c) Montrer que g_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x > 0, \quad \int_0^1 e^{-x\psi(t)} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xu^2} g_2'(u) du.$$

5. (a) Etudier la continuité des fonctions H_1 et H_2 définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$H_1(t) = \begin{cases} g_1'(t), & \text{si } t > 0 \\ \sqrt{2}, & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad H_2(t) = \begin{cases} g_2'(t), & \text{si } t > 0 \\ -\sqrt{2}, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

(b) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\psi(t)} dt = \sqrt{2\pi},$$

où ψ est la fonction définie dans la question 3.

6. (a) Dédurre que

$$\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

(b) Montrer que

$$\forall s > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-s} \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x)} = 1.$$

Partie II

On pose

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0.$$

1. Montrer que β est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que: $\beta(x+1, y) = \frac{x}{y} \beta(x, y+1)$.

(b) Montrer que: $\beta(x, y+1) = \beta(x, y) - \beta(x+1, y)$.

(c) En déduire que: $\beta(x, y) = \frac{x+y}{x} \beta(x+1, y)$.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \frac{\Gamma(x+y+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \beta(x+n+1, y).$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Psi_{n,x}(y) = n^y \beta(x+n+1, y), \quad y \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta(x+n+1, y) = \int_0^{+\infty} e^{-t(x+n+1)} t^{y-1} \left(\frac{1-e^{-t}}{t} \right)^{y-1} dt.$$

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, la suite de fonctions $(\Psi_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction Γ .

(c) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta(n+2, n) = \frac{(n-1)!(n+1)!}{(2n+1)!}.$$

(d) La suite de fonctions $(\Psi_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$?

5. Établir que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

6. (a) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \beta(x, x) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt.$$

(b) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad 2^{2x-1} \beta(x, x) = \beta\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

(On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variables $s = 4t(1-t)$.)

(c) En déduire la formule de duplication de Legendre

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

7. On admet que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que la fonction: $t \mapsto \ln(\Gamma(t))$ est bien définie et est intégrable sur $]0, 1]$.

(b) Montrer que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(t)) dt = \frac{\ln(2\pi)}{2}.$$

(c) En déduire que

$$\forall x > 0, \quad \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt = x \ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}).$$