

Devoir de contrôle n° 2.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Problème

- Dans tout le problème f désigne une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note I l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \longrightarrow f(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x \in I$, on note

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt.$$

Partie I: Etude générale de la transformation L .

- (a) Vérifier que si I n'est pas vide, alors I est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que si I n'est pas vide, alors Lf est continue sur I .
- On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.
(a) Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Vérifier que I contient $\mathbb{R}_+^*$.
(c) Montrer que Lf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Lf(x) = 0$.
(e) Etablir que $xLf(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u} du$.
(f) En déduire la limite de $xLf(x)$ en 0^+ .

Partie II: Etude de quelques exemples.

■ A. On pose pour tout entier $n \geq 2$, $f_n(t) = \frac{te^{-nt}}{\ln n}$.

- Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 2} f_n$. On note f sa somme.
- Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$. La série $\sum_{n \geq 2} f_n$ est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?
- Soit $\varphi(t) = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$, $t > 0$.
(a) Montrer que φ est prolongeable en une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$Lf(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)(x+n)^2}.$$

■ **B.** Dans cette question, $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que $]0, +\infty[\subset I$.

2. Prouver que Lf est définie en 0.

3. Montrer que $Lf(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $(Lf)'(x)$ pour tout $x > 0$.

4. En déduire $Lf(x)$ pour tout $x > 0$.

5. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + n\pi} e^{-tx} dt.$$

(b) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

6. Dédurre de ce qui précède que Lf est continue sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

■ **C.** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $\sum_{n \geq 0} a_n$ est absolument convergente.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$. On note $f(t)$ sa somme sur son intervalle de convergence.

2. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

4. Montrer que $[1, +\infty[\subset I$ et que $\forall x \in]0, 1]$, $Lf\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$.
