



PREMIER DEVOIR DE CONTROLE
Section : MP 2

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Durée : 2 heures

L'épreuve comporte trois pages.

L'étudiant peut utiliser les résultats énoncés dans les questions précédentes; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations et objectif

Tout au long de problème, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M et $sp(M)$ son spectre dans $\mathbf{K}$.

Soient m un entier tel que $0 < m < n$, A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbf{K})$, A' un élément de $\mathcal{M}_{n-m}(\mathbf{K})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$. On définit, par blocs, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ les deux matrices suivantes :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A' \end{array} \right), \quad N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right).$$

Dans ce problème, on veut établir l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

- (i) M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$.
- (ii) A et A' sont diagonalisables sur $\mathbf{K}$ et il existe $Y \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$ tel que $B = AY - YA'$.

On rappelle que pour tous $E, E' \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$, $F, F' \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$, $G, G' \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbf{K})$ et $H, H' \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbf{K})$,

$$\left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E' & F' \\ \hline G' & H' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} EE' + FG' & EF' + FH' \\ \hline GE' + HG' & GF' + HH' \end{array} \right)$$

I. Préliminaires

1. Soient E et E' deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semblables sur $\mathbf{K}$ et telles que E' est diagonalisable sur $\mathbf{K}$. Montrer que E est diagonalisable sur $\mathbf{K}$.
2. Soient $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$ et $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que si $a \neq b$, alors T est diagonalisable sur $\mathbf{K}$.
 - (b) Lorsque $a = b$, déterminer c pour que T soit diagonalisable sur $\mathbf{K}$.
 - (c) Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ non semblables sur $\mathbf{K}$ et ayant même polynôme caractéristique.
3. Soient C et C' deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisables sur $\mathbf{K}$ et telles que $\chi_C = \chi_{C'}$. Montrer que C et C' sont semblables sur $\mathbf{K}$.

II. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i)

4. Soit $Y \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$ et $P = \left(\begin{array}{c|c} I_m & Y \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array} \right)$.
- (a) Justifier que P est inversible. Déterminer l'élément X de $\mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$ vérifiant $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & X \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array} \right)$.
- (b) Calculer $P^{-1}NP$. En déduire que si $B = AY - YA'$, alors M et N sont semblables.
5. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & 0 \\ \hline 0 & (A')^k \end{array} \right)$. En déduire que pour tout $Q \in \mathbf{K}[X]$,

$$Q(N) = \left(\begin{array}{c|c} Q(A) & 0 \\ \hline 0 & Q(A') \end{array} \right)$$
.
- (b) Montrer que N est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si, et seulement si, A et A' sont diagonalisables sur $\mathbf{K}$.
- (c) Montrer que si M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$, alors A et A' sont diagonalisables sur $\mathbf{K}$.
6. Démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).
7. **Eléments propres de M :** On suppose que A et A' sont diagonalisables sur $\mathbf{K}$ et qu'il existe Y dans $\mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$ tel que $B = AY - YA'$. Enfin, on considère $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ (resp $(V_j)_{1 \leq j \leq n-m}$) une base de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K})$ (resp $\mathcal{M}_{n-m,1}(\mathbf{K})$) formée par des vecteurs propres de A (resp A').
- (a) Justifier que $\chi_M = \chi_N$ et que $sp(M) = sp(A) \cup sp(A')$.
- (b) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\left(\begin{array}{c} U_i \\ \hline 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow m \\ \downarrow n-m \end{array}$ est un vecteur propre de M .
- (c) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, n-m\}$, $\left(\begin{array}{c} -YV_j \\ \hline V_j \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow m \\ \downarrow n-m \end{array}$ est un vecteur propre de M .
- (d) Déterminer alors une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ formée par des vecteurs propres de M .

III. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii)

Pour U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\Phi_{U,V}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ défini par

$$\Phi_{U,V}(X) = UX - XV, \text{ pour tout } X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Si X est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pose :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{1,1} & X_{1,2} \\ \hline X_{2,1} & X_{2,2} \end{array} \right)$$

avec $X_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$, $X_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$, $X_{2,1} \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbf{K})$ et $X_{2,2} \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbf{K})$. On note alors

$$\tau(X) = \left(\begin{array}{c|c} X_{2,1} & X_{2,2} \end{array} \right).$$

Il est clair que τ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{n-m,n}(\mathbf{K})$.

8. (a) Justifier que si $X = \left(\begin{array}{c|c} X_{1,1} & X_{1,2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, alors $\Phi_{N,N}(X) = \Phi_{M,N}(X)$.
- (b) En déduire que $\ker \tau \cap \ker \Phi_{N,N} = \ker \tau \cap \ker \Phi_{M,N}$.
9. (a) Montrer que si $\left(\begin{array}{c|c} X_{1,1} & X_{1,2} \\ \hline X_{2,1} & X_{2,2} \end{array} \right) \in \ker \Phi_{M,N}$, alors $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline X_{2,1} & X_{2,2} \end{array} \right) \in \ker \Phi_{N,N}$.



- (b) En déduire que $\tau(\ker \Phi_{M,N}) \subset \tau(\ker \Phi_{N,N})$.
10. Soit U dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, Q dans $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V = QUQ^{-1}$.
- (a) Montrer que l'application $\Psi : X \mapsto QX$ est un automorphisme du $\mathbf{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; déterminer sa réciproque Ψ^{-1} .
- (b) Etablir que $\Psi(\ker \Phi_{U,V}) = \ker \Phi_{V,V}$.
11. On suppose M et N semblables sur $\mathbf{K}$.
- (a) Vérifier que $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-m} \end{array} \right) \in \ker \Phi_{N,N}$.
- (b) Justifier que $\dim(\ker \Phi_{M,N}) = \dim(\ker \Phi_{N,N})$.
- (c) En considérant les restrictions de τ sur $\ker \Phi_{M,N}$ et $\ker \Phi_{N,N}$, montrer que
- $$\tau(\ker \Phi_{M,N}) = \tau(\ker \Phi_{N,N}).$$
- (d) Montrer que $\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_{n-m} \end{array} \right) \in \tau(\ker \Phi_{M,N})$.
- (e) En déduire qu'il existe Y dans $\mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbf{K})$ tel que : $B = AY - YA'$,
12. Démontrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Fin de l'énoncé.