

PREMIER EXAMEN
Section : MP 2

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Durée : 2 heures

L'épreuve comporte deux pages.
Le sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ (où $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbf{K}$ -espace vectoriel formé par les endomorphismes de E . On pose

$$\mathcal{GL}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \text{ est bijectif}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{SL}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \det f = 1\}$$

1. Montrer que $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe et que $\mathcal{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que n est impair et $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathcal{SL}(E) \longrightarrow \mathcal{GL}(E)$ est un isomorphisme de groupes.
$$(\lambda, u) \longmapsto \lambda \cdot u$$
3. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ vérifiant

$$u^2 = Id, \quad \forall u \in G$$

où Id désigne l'identité de E .

- (a) Vérifier que G est abélien.
- (b) Montrer que pour tout $u \in G$, u est diagonalisable et que $sp(u) \subset \{-1, 1\}$.
- (c) Montrer que si $u \in G \setminus \{\pm Id\}$, alors $sp(u) = \{-1, 1\}$ et $E = E_{-1}(u) \oplus E_1(u)$.
- (d) Montrer qu'il existe une base B de E telle que pour tout $v \in G$,

$$Mat_B(v) \in \{diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \varepsilon_i^2 = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

On pourra raisonner par récurrence sur n en étudiant les deux cas $G \subset \{\pm Id\}$ et $G \not\subset \{\pm Id\}$.

- (e) Dédire que $Card(G) \leq 2^n$.

Exercice 2

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $\chi_f(x) = \det(x.Id - f)$ son polynôme caractéristique, où Id désigne l'identité de $\mathbb{C}^p$. On pose

- $\chi_f(x) = \prod_{l=1}^k (x - \lambda_l)^{\alpha_l}$, où les λ_l sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives α_l .
- $q_j(x) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k (x - \lambda_l)^{\alpha_l}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.
- $N_j = \ker(f - \lambda_j.Id)^{\alpha_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^p = \bigoplus_{j=1}^k N_j$.

2. (a) Montrer qu'il existe des polynômes $r_1, \dots, r_k$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\sum_{j=1}^k r_j q_j = 1$.

(b) Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on pose $\Pi_j = (r_j q_j)(f)$. Montrer que

$$\Pi_1 + \dots + \Pi_k = Id$$

3. Soit m et n deux entiers distincts appartenant à $\{1, \dots, k\}$.

(a) Montrer que pour tout $v \in N_m$, $\Pi_n(v) = 0$.

(b) Montrer que pour tout $v \in N_m$, $\Pi_m(v) = v$.

(c) Dédire que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, Π_j est la projection sur N_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k N_l$.

4. Montrer que l'endomorphisme $d = \lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_k \Pi_k$ est diagonalisable.

5. On pose $n = f - d$.

(a) Soit $j \in \{1, \dots, k\}$. Montrer que pour tout $v \in N_j$, $n^{\alpha_j}(v) = 0$.

(b) En déduire que l'endomorphisme n est nilpotent.

6. Soit d' un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^p$ qui commute avec f .

(a) Montrer que d' laisse stable N_j , pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.

(b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{C}^p$ formée par des vecteurs propres à la fois de d et d' .

7. Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{C}^p$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de $\mathbb{C}^p$ tel que

$$d \text{ est diagonalisable } , \quad n \text{ est nilpotent } , \quad d \circ n = n \circ d \quad \text{et} \quad f = d + n$$

8. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (D, N) de matrices appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tel que

$$D \text{ est diagonalisable } , \quad N \text{ est nilpotente } , \quad DN = ND \quad \text{et} \quad A = D + N$$

Fin de l'énoncé.