

Devoir de Contrôle d'Analyse N°1

MP 2

Problème

On admet que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

On rappelle l'identité : $(\operatorname{ch}(t))^2 - (\operatorname{sh}(t))^2 = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\operatorname{ch}(t))^{n+1}}.$$

1. Montrer que a_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer a_0, a_1 et vérifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad 1 + \frac{n+1}{2} t^2 \leq (\operatorname{ch}(t))^{n+1} \leq e^{(n+1)t}.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

(c) Donner la nature des séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n$, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$.

4. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n.$$

(b) En déduire que

$$i. \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi.$$

$$ii. \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \ln(\sqrt{n} \cdot a_{2n})$.

(a) Montrer que

$$v_n - v_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}.$$



- (b) En déduire qu'il existe $L > 0$ tel que : $a_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L}{\sqrt{n}}$.
- (c) Calculer L .
- (d) Établir que : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_{n+1}$.
- (e) Déduire que : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- (f) Retrouver la nature des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$.
6. (a) Vérifier que : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
- (b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

- (c) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}.$$

7. (a) Vérifier que : $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}}$.
- (b) En déduire que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

- (c) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) (n \rightarrow +\infty).$$

Partie II

On pose, lorsque ceci a un sens,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que le domaine de définition de g est $[-1, 1[$.

Dans la suite, on utilisera le résultat admis suivant

- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$,

- $\forall x \in] -1, 1[, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$

2. (a) Montrer que g vérifie sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 1, \quad x \in] -1, 1[.$$



