

Examen d'Analyse N°1
MP 2

Exercice

On définit

- $E := \left\{ f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ converge} \right\}.$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ où l'on a $p_n(t) = t^n$.

On rappelle

- la formule de stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$
- Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $x \in E$, la distance de x à A est définie par : $d(x, A) = \inf_{a \in A} N(a - x).$

On admet que

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Soient $f, g \in E$. Montrer que la fonction : $t \mapsto f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) En déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Montrer que l'application $N_2 : f \mapsto \left(\int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E .
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in E$.

On considère alors, le sous-espace vectoriel F de E défini par

$$F = \text{Vect} \left\{ p_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

- Justifier que N_2 et $N_\infty : P \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}_+^*} |P(t)e^{-t}|$ définissent deux normes sur F .
- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_\infty(p_n)$.
- Les normes N_2 et N_∞ sont-elles équivalentes sur F ?

Dans toute la suite, on fixe $m \in \mathbb{N}^*$ et on pose

$$\mathcal{H}_m := \left\{ f \in E : \int_0^{+\infty} f(t)p_m(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = 0 \right\}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^{+\infty} f(t)p_m(t) \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

4. Montrer que $\mathcal{H}_m$ est un hyperplan de E et que : $E = \mathcal{H}_m \oplus \text{Vect}(p_m)$.
5. (a) Soit H un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E .
(b) En déduire que $\mathcal{H}_m$ est soit fermé soit dense dans E .
6. (a) Montrer que, pour tout $f \in E$, on a : $|\varphi(f)| \leq N_2(p_m)N_2(f)$.
(b) En déduire que $\mathcal{H}_m$ est un fermé de E .
7. (a) Montrer que : $\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(f)|}{N_2(f)} = N_2(p_m)$.
(b) Montrer que : $\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(f)|}{N_2(f)} = \frac{|\varphi(p_m)|}{d(p_m, \mathcal{H}_m)}$.
Indication : On pourra remarquer que si $f \in E$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}_m$ tels que : $f = \lambda p_m + h$.
(c) En déduire que :

$$d(p_m, \mathcal{H}_m) = N_2(p_m) = \sqrt{(2m-1)!}.$$

Problème

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

On pose alors

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} i. \quad & F(x+1) = F(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}. \\ ii. \quad & 2F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{2}{x+1}. \end{aligned}$$

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.

4. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} F(x) + \frac{1}{x} - \pi \cot(\pi x), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- (a) Vérifier que g est 1-périodique.
- (b) Vérifier que : $\frac{1}{x} - \pi \cot(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^2}{3} x$.
- (c) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Indication : on pourra distinguer les cas $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Justifier l'existence d'un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que : $|g(x_0)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| g\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \right| = |g(x_0)|.$$

(c) En déduire que g est la fonction nulle.

6. (a) Établir que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

(b) En utilisant la question 4-b, déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Soit u un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ converge uniformément sur $[0, u]$.

(b) Calculer l'intégrale : $\int_0^u \left(\frac{1}{x} - \pi \cot(\pi x) \right) dx$.

(c) En déduire que

$$\ln \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{u^2}{n^2} \right).$$

Partie II

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(\Gamma_n(x)).$$

1. Vérifier que

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n(x) = -x \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right).$$

2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x), \quad \forall x > 0.$$

3. En déduire que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction Γ et que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \frac{e^{G(x)}}{x(x+1)}.$$

4. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g'_n est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (b) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (c) En déduire que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_n(x+1) = \frac{nx}{n+1+x} \Gamma_n(x).$$

- (b) En déduire que : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

6. Soit $x \in]0, 1[$.

- (a) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \frac{n}{x(n+1-x) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}.$$

- (b) En déduire que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

- (c) Calculer alors $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.