

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax	
Epreuve de Physique de la fin du premier semestre	MP2 A.U : 2023-2024 Durée : 4H

Données :

- Masse de l'électron : $m = 9.10^{-31} kg$
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19} C$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8 ms^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9}$
- Nombre d'électrons libres par unité de volume dans le cuivre :
 $n (cuivre) = 1,1.10^{29} m^{-3}$
- $\gamma_0 = 5,8.10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$
- $div(\overrightarrow{rot}(\vec{u})) = 0$ pour tout champ vectoriel $\vec{u}$

Exercice :

On considère un modèle atomique constitué par un électron de masse m et de charge $(-e)$ lié élastiquement au reste de l'atome et susceptible de vibrer harmoniquement. Soit ω_0 la pulsation propre et $\vec{p}$ son moment dipolaire électrique.

Quand cet oscillateur est mis en vibration, il rayonne de l'énergie. La puissance moyenne perdue ou rayonnée à travers tout l'espace est donnée par :

$$P = \frac{dW}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle$$

Où W désigne l'énergie, t le temps, c la vitesse de la lumière et $\langle \ddot{p}^2 \rangle$ la valeur moyenne du carré de la dérivée seconde par rapport au temps du moment du dipôle électrique p de l'oscillateur.

La perte d'énergie provoque un amortissement de l'oscillation. On se propose de calculer le coefficient d'amortissement η dû au rayonnement de l'oscillateur.

On désigne par $s = s_0 \exp(-i\omega_0 t)$ l'élongation du mouvement de l'électron. L'énergie de l'oscillateur est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 s_0^2$$

- Q1. Exprimer $\langle \vec{p}^2 \rangle$ en fonction de ω_0, e, m et W .
- Q2. Établir l'équation différentielle relative à l'énergie W .
- Q3. Écrire la solution de cette équation différentielle sous la forme $W = W_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$.
- Q4. Donner l'expression et la signification physique de τ . En déduire la variation de l'amplitude s_0 des oscillations en fonction du temps.
- On traduit l'amortissement du mouvement de l'électron par l'existence d'une force de freinage qui s'écrit sous la forme $\vec{F}_f = -m \eta \frac{d\vec{s}}{dt}$ où η est un coefficient d'amortissement positif et une force de rappel $\vec{F}_r = -m \omega_0^2 \vec{s}$.
- Q5. Établir l'équation du mouvement de l'électron atomique.
- Q6. En admettant que la valeur moyenne du travail de la force de freinage pendant l'unité de temps correspond à la puissance moyenne perdue par rayonnement, déterminer le coefficient d'amortissement η et l'exprimer en fonction de τ .

Problème 1 :

Partie I : Onde plane dans le vide

Soient ρ et $\vec{j}$ les densités volumiques de charge et de courant, sources d'un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans l'espace vide rapporté au repère orthonormé direct $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- Q7. Écrire les équations de Maxwell et donner leurs significations physiques.
- Q8. Écrire l'équation de conservation de la charge reliant ρ et $\vec{j}$ et montrer qu'on peut la trouver à partir des équations de Maxwell.

Dans le vide illimité dépourvu de charge et de courant, on considère une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω . Le champ électrique de cette onde est donnée par :

$$\vec{E} = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_x$$

- Q9. Écrire les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants.
- Q10. Trouver l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$. En déduire le vecteur d'onde k en fonction de ω et c .
- Q11. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.

Soit $\vec{R}$ le vecteur de Poynting et u_{em} la densité d'énergie électromagnétique.

- Q12. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$. Quelle est la signification physique de ce vecteur. Quelle est son unité dans le système international.

Q13. Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction de c, E_0, ε_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Q14. Déterminer l'expression de la densité d'énergie électromagnétique u_{em} . En déduire la valeur moyenne temporelle.

Q15. Exprimer $\vec{R}$ en fonction de u_{em} .

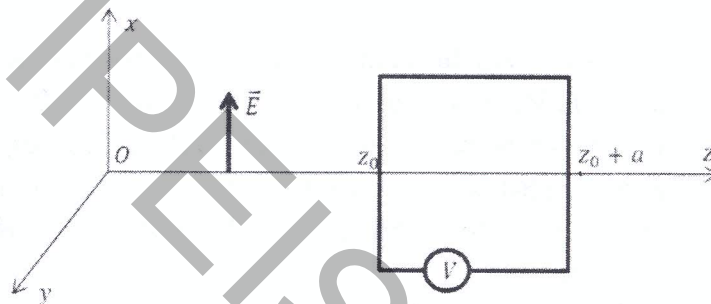
Le champ électromagnétique arrive sur un détecteur placé perpendiculairement à l'axe oz . Soit P la puissance moyenne reçue par le détecteur de surface S .

Q16. Déterminer l'expression de E_0 en fonction de P, ε_0, c et S .

Q17. Comment doit-on placer une antenne filaire (tige métallique) pour détecter l'onde.

Le champ électromagnétique est maintenant détecté par un cadre conducteur rectiligne formant un carré de côté a , fermé sur un voltmètre est placé dans le plan xoz comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le cadre est orienté de sorte que sa normal $\vec{N}$ est colinéaire à $\vec{e}_y$.

Le centre du cadre est à l'abscisse $z_0 + \frac{a}{2}$ et les brins verticaux aux abscisses z_0 et $z_0 + a$.



On se place dans le cas où la longueur a du côté du cadre est telle que le champ magnétique ne peut pas être considéré comme uniforme sur la surface du cadre.

Q18. Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre à l'instant t en fonction de t, c, ω, a, E_0 et z_0 .

Q19. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ dans le cadre.

Q20. Déduire l'expression du courant induit.

Q21. Le voltmètre mesure une tension efficace dans le cadre. Déterminer l'expression de cette tension U_{eff} .

Q22. La valeur de a étant donné, montrer qu'il existe des valeurs ω_{max} de ω pour lesquelles l'amplitude de la force électromotrice induite est maximale et d'autres valeurs ω_{min} pour lesquelles elle est nulle. Déterminer ω_{max} et ω_{min} en fonction de c et a .

On se place dans le cas où le champ électrique de l'onde considérée s'écrit :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Q23. Donner le vecteur d'onde et indiquer la direction de propagation de l'onde.

Q24. Établir dans le plan d'onde l'équation que vérifie les composantes du champ électrique.

Q25. Préciser les états de polarisation de l'onde dans les cas suivants : $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$.

Q26. Quelles sont les conditions sur E_{0x}, E_{0y} et φ pour avoir une polarisation circulaire droite.

Partie II : Réflexion d'une onde plane sur un plan métallique parfait.

On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide. Le champ électrique de cette onde est donné par

$$\vec{E}_i = E_0 \exp i(kz - \omega t) \vec{e}_x$$

Cette onde arrive sous une incidence normale sur un conducteur parfait limité par le plan $z = 0$.

Q27. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_i$.

Soit $\vec{E}_r = E_{0r} \exp i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_x$ le champ électrique de l'onde réfléchi par le conducteur parfait.

Q28. Donner l'expression de $\vec{k}_r$.

Q29. Écrire la relation de passage de $\vec{E}$ en $z = 0$. En déduire E_{0r} en fonction de E_0 . Réécrire l'expression de $\vec{E}_r$.

Q30. Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde réfléchie $\vec{B}_r$.

Les ondes incidente et réfléchie se superposent dans le vide $z < 0$.

Q31. Déterminer en tout point et à tout instant dans le demi espace ($z < 0$) les champs électrique et magnétique résultant. Quelle est la nature de l'onde résultante.

Q32. Déterminer le vecteur de Poynting de l'onde résultante. En déduire sa valeur moyenne dans le temps. Conclure.

Q33. Montrer qu'il se développe des courants surfaciques de densité $\vec{J}_s$ à la surface du plan métallique $z = 0$. Quelle est la direction de ces courants. Déterminer l'expression de $\vec{J}_s$.

Q34. Déterminer la pression de radiation qu'exerce le champ électromagnétique totale sur le conducteur.

Partie III : Onde électromagnétique entre deux plans conducteurs

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide limité par les plans conducteurs parfait d'équation $z = 0$ et $z = a$. Le champ électrique de cette onde est donné en notation complexe par:

$$\vec{E} = E_0 \sin(\alpha z) \exp i(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

Q35. A partir de l'équation de propagation de $\vec{E}$. Donner l'expression du vecteur d'onde.

Q36. Montrer que les conditions aux limites imposent une relation entre α et a que l'on précisera.

Q37. Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ ne peut se propager que si ω est supérieur à une pulsation de coupure ω_c que l'on déterminera.

Q38. Déterminer la vitesse de phase V_ϕ et la vitesse du groupe V_g de l'onde.

Problème 2 :

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, on considère un milieu conducteur métallique localement neutre ($\rho = 0$), contenant n électrons libres par unité de volume (masse m , charge $-e$). On admet que le milieu exerce sur un électron libre de vitesse moyenne $\vec{V}$, une force de freinage $\vec{F}_f$ de type visqueux $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{V}$, où τ est une constante positive caractéristique du milieu.

Ce métal a une permittivité diélectrique ϵ_0 et une perméabilité magnétique μ_0 identique à celle du vide.

Partie I : Conductivité électrique en régime stationnaire.

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude du métal en régime statique. Le milieu conducteur est initialement en équilibre (vitesse moyenne des électrons nulle). À l'instant $t = 0$ s, un générateur extérieur impose au milieu, de façon instantanée, un champ électrique $\vec{E}_0$ uniforme et permanent. On se propose d'établir la relation entre le vecteur densité du courant $\vec{J}_0$ dans ce milieu et le champ électrique $\vec{E}_0$.

Q39. Écrire dans R , l'équation du mouvement d'un électron libre. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{V}$.

Q40. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle. En déduire qu'en régime permanent, la vitesse moyenne $\vec{V}_m$ d'un électron libre s'écrit :

$$\vec{V}_m = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$$

Q41. Donner la dimension de τ et sa signification physique.

Q42. Écrire en régime permanent l'expression du vecteur densité de courant $\vec{J}_0$, en déduire celle de la conductivité γ_0 du milieu en régime stationnaire.

Q43. Déterminer la valeur numérique de τ pour le cuivre. Commenter le résultat.

Partie II : Conductivité électrique en régime variable.

Le métal occupe le demi espace $z > 0$, l'interface air-métal ($z = 0$) est dépourvue de charge et de courant. Une onde électromagnétique progressive, plane, monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement suivant l'axe Ox , se propage dans le demi espace vide $z < 0$ suivant la direction des z croissant. Le champ électrique de cette onde incidente, en un point $M(x, y, z < 0)$, est donné en notation complexe par :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = E_0 \exp i(k_0 z - \omega t) \vec{e}_x$$

Où E_0 et k_0 sont des constantes réelles positives.

Q44. Écrire les équations de Maxwell dans le métal où le champ électrique est $\vec{E}_t$, le champ magnétique est $\vec{B}_t$ et la densité de courant de conduction est $\vec{J}_c$. Donner la signification physique de ces équations.

Le champ $\vec{E}_t$ est de la forme:

$$\vec{E}_t(M, t) = E_{0t} \exp i(\underline{k}z - \omega t) \vec{e}_x$$

Où E_{0t} et $\underline{k}$ sont des quantités à priori complexes.

Q45. Écrire l'équation du mouvement d'un électron libre dans le conducteur. On négligera la force magnétique par rapport à la force électrique ainsi que la dépendance spatiale de l'onde. Justifier ces approximations.

Q46. Montrer que le vecteur densité de courant $\vec{J}_c$ peut se mettre sous la forme:

$$\vec{J}_c = \underline{\gamma} \vec{E}_t(M, t)$$

Q47. Dédire l'expression de $\underline{\gamma}$. Quelles sont les différences importantes par rapport au cas du régime statique.

Q48. Jusqu'à quelle fréquence f_c , la conductivité électrique du cuivre est égale à sa valeur en régime stationnaire à 1% près.

Parti III : Comportement d'une onde électromagnétique dans un métal.

Dans cette partie on suppose que $f < f_c$.

Q49. Montrer que, dans ce cas, la densité de courant de déplacement est négligeable par rapport à celle du courant de conduction $\vec{J}_c$. Conclure.

Q50. Écrire l'équation de propagation du champ $\vec{E}_t$ de l'onde transmise dans le conducteur.

En déduire $\underline{k}$ et E_{0t} . On posera $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$.

Q51. Donner la dimension et la signification physique de δ .

Q52. Calculer, dans le cas du cuivre, les valeurs de δ pour les fréquences suivantes $f_1 = 50\text{Hz}$ (Fréquence domestique) et $f_2 = 100\text{MHz}$ (onde radio).

Q53. Le milieu métallique est une portion de fil cylindrique du cuivre de diamètre a et de longueur L .

Q54. Montrer que si $a \gg \delta$, la résistance R du fil est donnée par $R \approx \frac{ra}{2\delta}$ Où $r = \frac{L}{\pi a^2 \gamma_0}$ est la résistance en régime statique d'une longueur L du fil.

Q55. Expliquer pourquoi un fil de cuivre de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique alors qu'il ne convient pas à la transmission de la fréquence radio.

On se place dans le cas où $\delta \rightarrow 0$. L'interface $z = 0$ est une grille constituée de fils métalliques (très bons conducteurs) parallèles.

Q56. En orientant les fils dans la direction de l'axe Ox , expliquer le phénomène qui aura lieu au niveau de la grille.

Q57. Même question si on oriente les fils dans la direction de l'axe Oy .

Q58. Proposer une utilisation d'une telle grille.

Conducteur en hautes fréquences : $\omega\tau \gg 1$.

Q59. Comparer la période T de l'onde à τ . Quelle hypothèse vous semble être mise en cause. Montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{\vec{j}}_c = \underline{\gamma}(\omega) \underline{\vec{E}}_t$$

Q60. Expliciter l'expression de $\underline{\gamma}(\omega)$.

Q61. Quelle est la valeur moyenne dans le temps de $\underline{\vec{j}}_c \cdot \underline{\vec{E}}_t$. Laquelle de ces deux propositions est-elle exacte. Justifie clairement votre réponse.

- À haute fréquence, la conductivité diminue, alors les pertes par effet Joule augmentent.

- À haute fréquence, le comportement du conducteur se modifie et les pertes par effet Joule diminuent.

Q62. Montrer que $\underline{\vec{E}}_t$ vérifie l'équation:

$$\Delta \underline{\vec{E}}_t = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}}_t$$

Q63. Exprimer ω_p^2 en fonction de n, e, m et ϵ_0 .

On suppose que $\omega > \omega_p$.

Q64. Quelle est la nature de l'onde dans le milieu.

Q65. Trouver l'indice de réfraction du milieu, la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de l'onde dans ce milieu.

On suppose maintenant que $\omega < \omega_p$.

Q66. Déterminer le nombre d'onde $\underline{k}$. En déduire le champ électrique $\underline{\vec{E}}_t$ en fonction de $\underline{E}_{0t}$, ω, z et $\delta' = c(\omega_p^2 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$. Quelle est la nature de l'onde dans le milieu.