

Devoir de contrôle d'Algèbre N°2

Section: MP 2

Durée: 2h

Date: Mars 2024

Nbre de pages: 2

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Rappels et notations :

Dans ce problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\text{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et $\text{tr}(A)$ la trace de A . On définit également l'exponentielle de A par

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Par ailleurs, on désigne par $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et par

$$\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R}) \mid \text{sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*\}.$$

Enfin, on note $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Série entière en une matrice carrée

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on définit $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(AA^t)}$.

1. (a) On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$\text{Vérifier que } \|A\|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij}^2.$$

- (b) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- (c) Montrer que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

- (d) En déduire que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Dans la suite, on munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie au préalable.

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et on note Π_A le polynôme minimal de A de degré $d \in \mathbb{N}^*$. En outre, on désigne par $\mathbb{R}[A] = \{Q(A) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ formé par les matrices qui s'écrivent sous la forme d'un polynôme en A .

2. (a) Montrer que la famille $(I_p, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$, puis déduire la dimension de $\mathbb{R}[A]$.
 (b) En déduire que, pour toute matrice M de $\mathbb{R}[A]$, il existe un unique polynôme R de degré strictement inférieur d tel que $M = R(A)$.
 (c) Justifier brièvement que $\mathbb{R}[A]$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on se donne une série entière à coefficients réels $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $r \in]0, +\infty]$. On suppose de plus que $\|A\| < r$.

- (a) Montrer que la série matricielle $\sum a_n A^n$ converge.

- (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme R de degré strictement inférieur d tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = R(A)$.

Partie II : Une identité trigonométrique matricielle

On fixe A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et on note Π_A le polynôme minimal de A de degré $d \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrices carrées de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes Q et R de degré strictement inférieur d tels que $\cos(A) = Q(A)$ et $\sin(A) = R(A)$. En déduire que les matrices $\sin(A)$ et $\cos(A)$ commutent.
- On note $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) ; x \mapsto \cos^2(xA) + \sin^2(xA)$.
 - Montrer que la fonction vectorielle $x \mapsto \cos(xA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $\frac{d}{dx} \cos(xA) = -A \sin(xA)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On admettra de même que la fonction $x \mapsto \sin(xA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $\frac{d}{dx} \sin(xA) = A \cos(xA)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle.
 - En déduire que $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_p$.

Partie III : Quelques propriétés préliminaires

- On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des nombres réels.

Montrer que $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p})$.

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}BP$, où P est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible.

Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.

- Soit A une matrice de $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$.

- On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A .

Montrer, à l'aide du théorème spectral, que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$ et en déduire que, pour tout $1 \leq k \leq p$, $|\lambda_k| \leq \|A\|$.

- On note $\chi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \dots, m_r$.

Montrer que $e^A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ et que $\text{sp}(e^A) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}\}$. Comparer les ordres de multiplicité de λ_k et e^{λ_k} , pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que $AV = \lambda V$. Montrer que $e^A V = e^\lambda V$.

- Montrer que, pour tout réel λ , $\ker(A - \lambda I_p) = \ker(e^A - e^\lambda I_p)$.

- Soit M une matrice de $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $M = {}^t P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P$.

Partie IV : Logarithme d'une matrice symétrique définie positive

- On se propose de prouver que l'application

$$\exp : \mathcal{S}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}) ; A \mapsto e^A$$

est bijective.

- Montrer que $\exp$ est surjective.

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ telles que $e^A = e^B$.

- Montrer que, pour tout réel λ , $\ker(A - \lambda I_p) = \ker(B - \lambda I_p)$.

- En déduire que $A = B$.

La fonction réciproque de $\exp$ sera notée

$$\log : \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_p(\mathbb{R}) ; A \mapsto \log(A).$$

- Soit A une matrice de $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+^*$ les valeurs propres de A .

- Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$\log(A) = {}^t P \text{diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_p)) P \text{ et } A = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P.$$

- En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ et que $\log(A^{-1}) = -\log(A)$.

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ qui commutent.

- Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et $\beta_1, \dots, \beta_p$ tels que

$$A = {}^t P \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) P \text{ et } B = {}^t P \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p) P.$$

- En déduire que $AB \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ et que $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$.

- On fixe A une matrice de $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. On note d le degré du polynôme minimal de A .

- Montrer que $I_p - A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

- Montrer rigoureusement que $\log(I_p - A) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n}$.

- En déduire qu'il existe un unique polynôme R de degré strictement inférieur à d tel que $\log(I_p - A) = R(A)$.