

Devoir de Contrôle N° 2 ANALYSE

nb de pages : 2

Problème .

Partie I . On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et l'application $g(t) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du - I$, $t \geq 0$

- Soit l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$
 - Montrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et trouver F'
 - Déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = -\arctan(x) + c$ pour tout $x > 0$
- Vérifier la convergence de l'intégrale I .
 - Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = I + \int_0^{+\infty} x e^{-xt} g(t) dt$.
 - Déduire que I est la limite de F en 0.
- Déduire alors à l'aide de théorème de convergence dominée la valeur de I .

Partie II .

Pour $T > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(T) = \int_{-T}^T \frac{e^{it}}{(1+it)^n} dt$ et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_T : \omega \mapsto \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{1+it} dt$.

- Montrer que f_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^* \quad f_T'(\omega) + f_T(\omega) = 2 \frac{\sin(T\omega)}{\omega}$$

- Calculer la dérivée de la fonction $\omega \mapsto e^{\omega} f_T(\omega)$ et déduire que :

$$f_T(\omega) = 2 \left(\arctan(T) + \int_0^{\omega} e^{\theta} \frac{\sin(T\theta)}{\theta} d\theta \right) e^{-\omega}$$

2. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall \omega > 0, \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^\omega (e^\theta - 1) \frac{\sin(T\theta)}{\theta} d\theta = 0$$

- (b) Utiliser la partie (I) pour calculer $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^\omega \frac{\sin(T\theta)}{\theta} d\theta$, pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

- (c) Dédurre que pour $\omega > 0$, $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(\omega) = 2\pi e^{-\omega}$.

3. (a) Vérifier que pour $T > 0$ on a : $\frac{e^{iT}}{(1+iT)^n} - \frac{e^{-iT}}{(1-iT)^n} = \frac{2i}{(1+T^2)^{\frac{n}{2}}} \sin(T - n \arctan(T))$.

- (b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$ que :

$$I_{n+1}(T) = -\frac{2 \sin(T - n \arctan(T))}{n(1+T^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{n} I_n(T)$$

- (c) Montrer alors la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(1+it)^n} dt$ pour $n \geq 2$ et le calculer.

Partie III.

On considère l'équation différentielle (E) : $ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$. On note J_0 sa somme.

2. Montrer que J_0 vérifie l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ et calculer $J_0(0)$ et $J_0'(0)$.

3. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{it \sin(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(t \sin(\theta)) d\theta$ pour $t \in \mathbb{R}$.

4. En développant le cosinus en série entière, Montrer que $J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin(\theta)} d\theta$

On admettra le résultat suivante pour $p \in \mathbb{N}$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2p} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$, "Intégral de Wallis"

5. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\theta} \theta^n d\theta = n!$, pour $n \geq 0$.

6. Montrer alors que pour tout $\epsilon > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t^2} t J_0(t) dt = \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{1}{4\epsilon}}$.

On admettra pour la suite que cette formule reste vraie pour $\epsilon \in \mathbb{C}$ à partie réelle > 0 .

7. Soit l'application $J_1(t) = \frac{t}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ somme d'une série entière définie sur $\mathbb{R}$.

- (a) En développant en série $e^{-\frac{t^2}{4(1+is)}}$ et en intégrant terme à terme, montrer à l'aide de Partie (II) que:

$$J_1(t) = \frac{t}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1+is)s - \frac{t^2}{4(1+is)}} \frac{ds}{(1+is)^2}$$

- (b) Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $a \neq b$, Montrer que:

$$b \int_0^{+\infty} J_0(at) J_1(bt) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } b > a \\ 0 & \text{si } b < a \end{cases}$$