

Examen N°2.

Epreuve: Analyse

Exercice :

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\|u\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|.$$

Soient $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.
- On définit la famille $u * v$ par $(u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $u * v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et majorer $\|u * v\|$ à l'aide de $\|u\|$ et de $\|v\|$.
- Montrer que la loi $*$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative et commutative.
- Vérifier que la famille $\delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ est l'élément neutre pour $*$.
- On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon.
On se propose de montrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ par $*$.
Pour ce faire on suppose que u admet un inverse $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ pour $*$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $v_n = v_{n-1}$ et déduire que $v_0 = 0$.
 - Déduire $v_n = -1$, pour $n \leq -1$ et conclure.

Problème :

Partie I :

Soit n un entier naturel non nul. On note S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, (l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \dots, n\}$ vers lui-même).

On rappelle qu'un point fixe de $\sigma \in S_n$ est un entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i) = i$.

Une permutation $\sigma \in S_n$ est appelée un dérangement si elle n'a aucun point fixe.

Pour tout $n \geq 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $\{1, 2, \dots, n\}$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

On munit l'ensemble fini S_n de la probabilité uniforme notée P_n . Sur l'espace probabilisé fini (S_n, P_n) , on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma \in S_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre

de points fixes de la permutation σ .

On introduit la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$, dont le rayon de convergence est noté R , et dont la somme sur l'intervalle de convergence $] -R, R[$ est notée s .

1. Justifier que $R \geq 1$.
2. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, justifier que le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement k points fixes est $C_n^k d_{n-k}$. En déduire que $P_n(X_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, s(x)e^x = \frac{1}{1-x}$. En déduire que $R = 1$.
4. En écrivant $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $\frac{d_n}{n!}$ sous la forme d'une somme.
5. Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Sur l'espace probabilisé fini (S_n, P_n) , on définit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in S_n$, $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

6. Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.
7. Montrer que, pour $i \neq j$, la variable $U_i U_j$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
8. Exprimer X_n à l'aide des U_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Déterminer alors l'espérance et la variance de X_n .
9. Dans cette question, on fixe un entier naturel k . Déterminer $\ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(X_n = k)$.
Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \ell_k$.
10. Quelle est la loi de Y ?
On note G_n et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y .
11. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, montrer que pour n assez grand on a

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{k=n-i+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

12. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(t) = G_Y(t).$$

Partie II :

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires (en abrégé v.a) à venir.

Soient X et Y deux v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la *distance en variation totale* entre X et

Y par : $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |P(X = k) - P(Y = k)|$.

- Soient X, Y et Z trois v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. Prouver les propriétés :
 - $0 \leq d(X, Y) \leq 1$,
 - $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow P_X = P_Y$ où P_X et P_Y sont les lois de probabilités respectives de X et Y ,
 - $d(Y, X) = d(X, Y)$,
 - $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$.
- Soient X et Y deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda, \mu \in]0, 1[$. Calculer $d(X, Y)$.
- Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0, 1[$ et Y une v.a suivant la loi de Poisson de même paramètre λ .
 - Montrer que : $d(X, Y) = \lambda(1 - e^{-\lambda})$.
 - En déduire que : $d(X, Y) \leq \lambda^2$.

On reconsidère les v.a X_n introduites dans la partie I. Soit aussi Y une v.a de loi de Poisson de paramètre 1.
- Vérifier la relation, pour tout n entier naturel non nul,

$$2d(X_n, Y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

- En remarquant que $\frac{1}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$
- Montrer que

$$d(X_n, Y) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n}{(n+1)!} \right).$$

Partie III :

Soient X et Y deux v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit le produit $P_X * P_Y$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_X * P_Y(k) = \sum_{i=0}^k P(X=i)P(Y=k-i).$$

- Justifier que $P_X * P_Y$ définit une loi de probabilités sur $\mathbb{N}$.
- Si X et Y sont indépendantes, prouver que : $P_{X+Y} = P_X * P_Y$ où P_{X+Y} est la loi de probabilités de la v.a $X+Y$.
- Soient X, Y, U et V Montrer que, pour tout k entier naturel,

$$\begin{aligned} |(P_X * P_Y)(k) - (P_U * P_V)(k)| &\leq \sum_{i=0}^k P(Y=k-i) |P(X=i) - P(U=i)| \\ &\quad + \sum_{i=0}^k P(U=i) |P(Y=k-i) - P(V=k-i)|. \end{aligned}$$

On notera dans la suite de cet énoncé $X * Y$ une v.a qui suit la loi $P_X * P_Y$.

4. Établir l'inégalité

$$d(X * Y, U * V) \leq d(X, U) + d(Y, V),$$

et déduire que si $U = U_1 * U_2 * \dots * U_n$ et $V = V_1 * V_2 * \dots * V_n$ alors

$$d(U, V) \leq \sum_{k=1}^n d(U_k, V_k).$$

5. Soit U une variable binomiale de paramètre (n, λ) avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, 1[$ et $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$ où $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes suivant une v.a de loi de Poisson de paramètre λ .

(a) Montrer que Y suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

(b) En utilisant les résultats de cette partie ainsi que le résultat de la question II.3, prouver l'inégalité

$$d(U, Y) \leq n\lambda^2.$$

On admettra que toute v.a de loi de Poisson de paramètre α est somme de n v.a indépendantes de loi de Poisson de paramètre α/n .

6. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > [\alpha]$ ($[\cdot]$ désigne la partie entière), on note B_n une variable binomiale de paramètre $(n, \frac{\alpha}{n})$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, déduire à l'aide de ce qui précède la valeur de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n = k).$$

7. Soient α et β deux réels strictement positifs et X et Y deux v.a suivant la loi de Poisson de paramètres respectifs α et β . Montrer que :

$$d(X, Y) \leq |\beta - \alpha|.$$

(Ind : Intercaler des variables binomiales de paramètres $(n, \alpha/n)$ et $(n, \beta/n)$).