

Examen de Mathématiques II
Section : M.P.2

Durée : 3h

Date : 10 Mai 2024

Nbre de pages : 4

Exercice

Notations et conventions

- Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On confond un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

- Si i et j sont deux entiers de $\{1, \dots, n\}$, la j -ème dérivée partielle de f_i en x est notée $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$
- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note $J_x(f)$ la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$,
1. Soit A une matrice carrée réelle de taille n et b un élément de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa matrice jacobienne $J_x(f)$ en tout point x de $\mathbb{R}^n$.

2. Dans cette section, g désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On fixe un élément $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = g(ta) = g(ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$$

- (a) Justifier que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t , donner $\varphi'(t)$.
 (b) En déduire qu'au voisinage de 0

$$g(ta) = g(0) + t(a_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(0) + a_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(0) + \dots + a_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(0)) + o(t)$$

Dans la suite f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note toujours

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i, j et k sont trois entiers de $\{1, \dots, n\}$, la dérivée partielle seconde de f_k en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

3. Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $\{1, \dots, n\}$, on a $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.
 4. Dans cette question, on suppose que la matrice jacobienne $J_x(f)$ est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.
 (a) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $\{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x)$.
 (b) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $\{1, \dots, n\}$, on a $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$.
 (c) Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
 Justifier que A est antisymétrique.
 (d) Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f , la matrice jacobienne $J_x(f)$ est-elle antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$?

Problème

Notations

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n .

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A et $rg(A)$ son rang ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Tr(A)$ la trace de A et $\det(A)$ son déterminant.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^t M = M\}$.

Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, On dit que M est symétrique positive si ${}^t X M X \geq 0$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, On dit que M est orthogonale si ${}^t M M = I_n$.

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal euclidien et on rappelle que

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tMM = I_n\}.$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

Partie I : Quelques résultats préliminaires

1. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice tMM est symétrique et positive.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que si A est symétrique positive alors toutes ses valeurs propres sont positives.
 - (b) On considère une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs. Montrer que D est symétrique positive.
 - (c) Dédurre que si les valeurs propres de A sont positives alors A est symétrique positive.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à termes positifs, et une matrice orthogonale P telles que ${}^tP {}^tBBP = \Delta$.

Partie II : Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on note $A_1, A_2, \dots, A_n$ les colonnes de A et on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, telle que ${}^tAA = D^2$.
 - (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, ${}^tA_iA_j = d_i^2\delta_{ij}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Que vaut A_i lorsque $d_i = 0$?
 - (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(E_1, \dots, E_n)$ de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $A_i = d_iE_i$.
 - (c) En déduire qu'il existe une matrice orthogonale E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à termes positifs, et une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP {}^tBBP = D^2$.
 - (b) Montrer alors qu'il existe une matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $BP = ED$, puis en déduire qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice S symétrique positive, telles que $B = OS$.

3. Application :

On pose $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $O \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, symétrique positive, telles que $C = OS$.

Partie III : Application à un calcul de distance

On rappelle que $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que

$$\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM), \text{ pour tout } (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$$

On note $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire défini ci dessus.

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche à calculer la distance :

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2.$$

2. Justifier que cette borne inférieure existe et est atteinte.
3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|\Omega A\|_2 = \|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.
4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive telle que $A = OS$.
 - (a) Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\|_2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
 - (b) On note D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$. Justifier l'existence des matrices D et P puis montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
5. On conserve les notations de la question précédente et on pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
 - (a) Justifier que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs.
 - (b) Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(D\Omega) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$.
 - (c) Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2\text{Tr}(D\Omega) + n$.
 - (d) Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|_2$, puis que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|_2$.

6. **Application :**

Calculer $d(C, \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$ où C est la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.