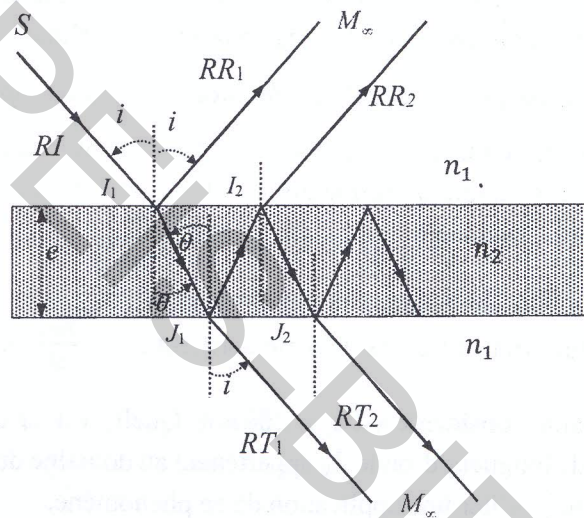


Devoir de Contrôle de Physique N° 02
(Durée : 2 H)

Problème : Interférences à ondes multiples

Partie A : Etude d'une lame à faces parallèles

On considère une lame mince de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice de réfraction $n = 1,5$ plongée dans l'air.



La lame est éclairée sous un angle d'incidence i par une source étendue monochromatique, de longueur d'onde λ , de pulsation ω , émettant une vibration lumineuse : $\underline{s}(M, t) = s_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})$ où s_0 est l'amplitude supposée constante.

Le rayon lumineux incident est réfléchi plusieurs fois sur les faces internes de la lame et donne par la suite des rayons réfléchis (RR) et des rayons transmis (RT) dans l'air.

On supposera que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude complexe sont les mêmes qu'en incidence normale et s'écrivent pour un rayon qui se propage d'un milieu d'indice n_1 vers un autre d'indice n_2 différents sous la forme suivante : $r_{1 \rightarrow 2} = r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t_{1 \rightarrow 2} = t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

Etude des amplitudes des ondes en un point M à l'infini : Cas d'une lame non traitée

1-a°/ Déterminer l'amplitude du premier rayon transmis s_{1t} en fonction s_0 , t_{12} et t_{21} . En déduire les amplitudes des trois premières vibrations lumineuses transmises en fonction de s_0 , r_{21} , t_{12} et t_{21} puis en fonction de s_{1t} .

1-b°/ Déterminer, de même, les amplitudes des trois premières vibrations lumineuses successives réfléchies en fonction de s_0 , r_{12} , r_{21} , t_{12} et t_{21} .

1-c°/ Remplir le tableau ci-dessous et calculer les amplitudes des vibrations lumineuses en fonction de s_0 . On donne : l'indice de la lame est $n = 1,5$ et celui de l'air est $n_0 = 1$. Commenter les résultats obtenus.

Amplitudes des vibrations lumineuses réfléchies	$s_{1r} = \dots$	$s_{2r} = \dots$	$s_{3r} = \dots$
Amplitudes des vibrations lumineuses transmises	$s_{1t} = \dots$	$s_{2t} = \dots$	$s_{3t} = \dots$

2-a°/ Si on ne tient compte que des deux premières ondes transmises, doit-on s'attendre à un contraste proche de l'unité ? Justifier votre réponse.

2-b°/ Mêmes questions pour les interférences des deux premières ondes réfléchies par la lame.

3°/ De quel type d'interféromètre une telle lame peut-elle être qualifiée ? Justifier votre réponse ? S'agit-il d'une interférence à deux ondes ou à ondes multiples ? décrire la figure d'interférences.

Etude des phases des ondes transmises en un point M à l'infini : Cas d'une lame traitée

Pour diminuer les pertes, on augmente le pouvoir réflecteur de la lame en déposant sur chacune de ses faces une mince couche semi-réfléchissante non absorbante d'un diélectrique.

On s'intéresse pour la suite au phénomène d'interférence entre les multiples ondes transmises par la lame.

4°/ Montrer que la différence de marche en un point M à l'infini entre deux ondes transmises successives est : $\delta(M) = 2ne \cos \theta$, où θ est l'angle de réfraction du rayon incident dans la lame, en déduire le déphasage $\varphi(M)$ entre ces deux ondes transmises. Faire un schéma explicatif.

5-a°/ A quelle condition obtient-on des interférences constructives ? Montrer que, pour une incidence normale, les seules longueurs d'ondes transmises par la lame vérifient : $\lambda = \frac{2ne}{k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

5-b°/ L'épaisseur de la lame considérée est $e = 200nm$. Quelle valeur de l'entier k permet de sélectionner une vibration lumineuse de longueur d'onde λ_k appartenant au domaine du visible correspondant à l'intervalle spectrale $[400nm, 800nm]$? Citer une application de ce phénomène.

Partie B : Etude de l'interféromètre à ondes multiples de Fabry-Pérot

L'interféromètre à ondes multiples de Fabry-Pérot est un instrument constitué de deux surfaces planes traitées, parallèles, limitant une lame d'air d'épaisseur e et d'indice $n_0 = 1$. Tous les coefficients de réflexion en amplitude valent r et ceux de transmission t . La lame est éclairée dans les mêmes conditions qu'en Partie A.

Etude de l'intensité transmise par le Fabry-Pérot

6°/ Expliquer pourquoi on place l'écran d'observation dans le plan focal image d'une lentille convergente. Faire un schéma.

7°/ Donner la différence de marche $\delta(M)$ entre deux ondes transmises successives en un point M de l'écran, en déduire la différence de phase $\phi(M)$ et la nature des franges d'interférence.

8-a°/ Montrer que l'amplitude complexe de la $N^{ième}$ onde transmise s'écrit :

$$s_N(\varphi) = s_0 R^{N-1} T \exp(-j(N-1)\varphi)$$

avec $R = r^2$, $T = t^2$ et $R + T = 1$. L'origine des phases est prise au niveau de la première onde transmise.

8-b°/ Montrer que l'amplitude complexe totale transmise $\underline{s}_T(\phi)$ s'écrit :

$$\underline{s}_T(\phi) = \frac{s_0 T}{1 - R \exp(-j\phi)}$$

8-c°/ Exprimer l'intensité résultante transmise : $I(\phi) = \underline{s}_T(\phi) \underline{s}_T^*(\phi)$ en un point M de l'écran d'observation sous la forme :

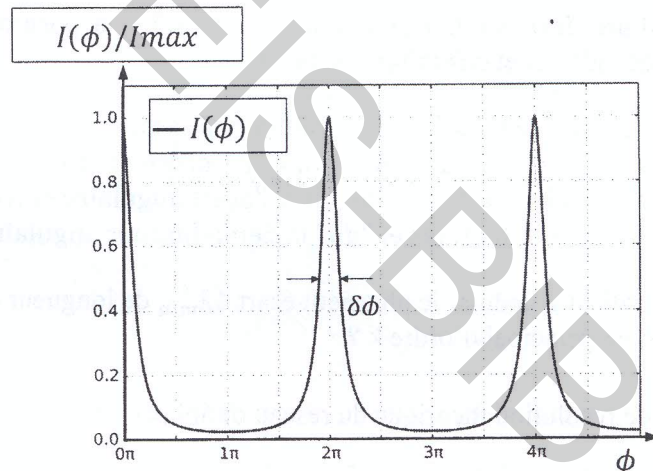
$$I(M) = I(\phi) = \frac{I_0}{1 + m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

expliciter les expressions de I_0 et du facteur m en fonction de s_0 , T et R .

9°/ Pour quelles valeurs de ϕ l'intensité $I(M)$ est-elle maximale ? Donner les expressions des intensités maximale et minimale et tracer l'allure de l'intensité $I(\phi)$.

Dans la suite, on se place dans le cas des surfaces à pouvoir de réflexion important ($R \approx 1$ et $T \ll 1$).

10°/ On définit la finesse du Fabry-Pérot par $\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\delta\phi}$; $\delta\phi$ est la largeur à mi-hauteur d'un pic d'intensité maximale. Déterminer la largeur à mi-hauteur $\delta\phi$ d'un pic d'intensité d'ordre d'interférence k en fonction du coefficient de réflexion R . Pour $R \approx 1$, montrer que la finesse devient $\mathcal{F} \simeq \frac{\pi}{T}$. Commenter.



Pour la suite, on se place dans le cadre où l'épaisseur e et l'angle d'incidence i sont fixés.

11°/ On appelle *intervalle spectral libre*, l'intervalle de fréquence $\Delta\nu$ entre deux pics successifs d'intensité maximale.

Montrer que $\Delta\nu = \frac{c}{2e \cos i}$, c étant la célérité de la lumière dans le vide.

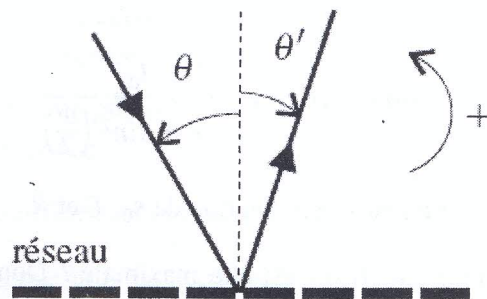
12°/ La résolution en fréquence du Fabry-Pérot $\delta\nu$ est donnée par la largeur à mi-hauteur en fréquence d'un pic d'intensité.

Exprimer $\delta\nu$ en fonction de la finesse $\mathcal{F}$ et de l'intervalle spectral libre $\Delta\nu$.

13°/ Quel est le pouvoir de résolution $\mathcal{R} = \frac{\nu_0}{\delta\nu}$ du Fabry-Pérot pour un pic d'intensité de l'ordre d'interférence p_0 et de fréquence ν_0 ?

Partie C : Etude d'un réseau par réflexion.

Un réseau plan par réflexion est constitué de N miroirs parallèles identiques de largeur $\varepsilon \ll \lambda$, séparés les uns des autres par une distance a , dite pas du réseau. Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ , sous l'angle d'incidence θ .



14°/ Montrer que l'intensité de l'onde diffractée à l'infini par le du réseau dans la direction θ' peut s'écrire :

$$I(M) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

Exprimer φ en fonction de λ , a , θ et θ' . Que représente I_0 ?

15°/ Etudier et tracer l'allure de $I(\varphi)$. On précisera en particulier la position et l'intensité des maxima principaux, des maxima secondaires et des minima d'intensité.

Le pouvoir de résolution d'un réseau et son aptitude à séparer deux longueurs d'ondes voisine λ et $\lambda + \Delta\lambda$ avec ($\Delta\lambda \ll \lambda$). En admettant que pour un ordre k donné, les longueurs d'ondes ne peuvent être séparées que si " $d\theta_k \geq d\theta$ ". Où " $d\theta_k$ " est l'écart angulaire entre deux maxima principaux correspondant aux deux longueurs d'ondes et " $d\theta$ " la demi-largeur angulaire d'un maximum principal.

16°/ Déterminer " $d\theta_k$ " et " $d\theta$ ". En déduire le plus petit écart $\Delta\lambda_{\min}$ de longueur d'onde que l'on peut détecter dans la région d'un maximum principal d'ordre k ?

17°/ Exprimer le pouvoir de résolution théorique du réseau défini par : $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}$ en fonction de k et N .

Partie D : Application

Comparaison de la résolution de l'interféromètre de Fabry-Perot et du réseau de diffraction

18°/ Application numérique : Donner le pouvoir de résolution pour un Fabry-Pérot d'épaisseur $e = 2\text{mm}$ et de finesse $\mathcal{F} = 150$ éclairé en incidence normale. On prendra $\lambda_0 = 500\text{nm}$.

19°/ Déterminer la largeur L d'un réseau de périodicité $n = 1200\text{traits/mm}$ et qui diffracte dans l'ordre $k = 1$ permettant d'atteindre la même résolution.

20°/ Pour le même pouvoir de résolution, lequel de ces deux spectroscopes est le plus pratique ? Justifier votre réponse.