


Devoir de contrôle d'Algèbre N°1

Section : MP 2

Durée : 2h

Date : Novembre 2024

Nbre de pages : 3

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Le sujet s'étale sur trois pages. Il est composé d'un exercice portant sur les structures algébriques et d'un problème ayant pour objectif l'étude des valeurs co-propres d'une matrice carrée complexe. Il est rappelé que l'usage des calculatrices scientifiques n'est pas autorisé.

Exercice : Caractéristique d'un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nul de neutre 0_A et d'unité 1_A .

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ k &\longmapsto k \cdot 1_A. \end{aligned}$$

1. Question préliminaire :

Montrer que les idéaux d'un corps K sont $\{0_K\}$ et K .

2. (a) Vérifier que f est un morphisme d'anneaux.

(b) Justifier qu'il existe un unique entier naturel n différent de 1, tel que $\ker f = n\mathbb{Z}$.

Cet entier n est appelé **caractéristique** de l'anneau A et se note $c(A)$.

3. Justifier que tout anneau de caractéristique nulle est infini.

4. Dans cette question uniquement, on suppose $c(A) := n \neq 0$.

(a) Montrer que l'ordre de 1_A dans le groupe additif $(A, +)$ vaut n .

(b) Montrer que, pour tout $x \in A$, $n \cdot x = 0_A$, puis déduire que l'ordre de x dans le groupe additif $(A, +)$ divise n .

(c) Montrer que si A est un anneau *intègre*, alors $n = 0$ ou n est un nombre premier.

(d) Montrer que si B est un sous-anneau de A , alors $c(B) = c(A) = n$.

5. Soient $(B, +, \times)$ un anneau non nul et $g : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux.

(a) Montrer que $c(B)$ divise $c(A)$.

(b) On suppose de plus, dans cette question, que A et B sont deux *corps* de caractéristique *non nulle*.

i. Justifier que g est une application injective.

ii. Montrer que $c(A) = c(B)$.

6. Soit $(B, +, \times)$ un anneau non nul. On suppose dans cette question que A et B sont de caractéristique *non nulle*.

Démontrer que $c(A \times B) = c(A) \vee c(B)$.

Problème : Étude des valeurs co-propres d'une matrice carrée complexe

Notations et définitions :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Dans tout ce problème, on identifie entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

- ◇ Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on désigne par $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$, son vecteur conjugué.
- ◇ Pour toute matrice $A = (a_{kj})_{1 \leq k, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\bar{A} = (\bar{a}_{kj})_{1 \leq k, j \leq n}$ sa matrice conjuguée.
- ◇ Étant donnée une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, un nombre complexe μ est dit **valeur co-propre** de A s'il existe un vecteur *non nul* $X \in \mathbb{C}^n$ vérifiant la relation ci-dessous :

$$A\bar{X} = \mu X.$$

X est dit **vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ** .

- ◇ Étant données deux matrices carrées complexes A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les deux matrices A et B sont dites **co-semblables** s'il existe une matrice $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $B = SAS^{-1}$ soit vérifiée.
- ◇ Étant données deux matrices carrées complexes A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, S une matrice *inversible* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et un vecteur X de $\mathbb{C}^n$, les candidats sont invités à utiliser sans justification les résultats de calcul suivants :

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B} ; \quad \overline{B \cdot X} = \bar{B} \cdot \bar{X} \quad \text{et} \quad \overline{S^{-1}} = \bar{S}^{-1}$$

1. Questions préliminaires :

- (a) Soient X et Y deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ tels que X soit non nul.

Montrer la famille (X, Y) est liée de $\mathbb{C}^n$ si, et seulement si, il existe un nombre complexe α tel que $Y = \alpha X$.

Ce résultat persiste-t-il si on ne supposait plus X non nul ?

- (b) Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Montrer que si X est un vecteur co-propre de A , alors il est associé à une seule valeur co-propre.

- (c) Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et μ un nombre complexe.

Montrer que si μ est une valeur co-propre de A , alors $\bar{\mu}$ est une valeur co-propre de $\bar{A}$.

- (d) Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, μ un nombre complexe et X un vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Montrer que si $A\bar{X} = \mu X$, alors $A\bar{A}X = |\mu|^2 X$.

2. Premières propriétés :

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- (a) On suppose que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur co-propre associé. Calculer $A e^{i\frac{\theta}{2}} \bar{X}$ pour tout réel θ . Dédire que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de A , pour tout réel θ .
- (b) En déduire que si μ est une valeur co-propre de A , alors $|\mu|$ est encore valeur co-propre de A .
- (c) Étant donnée une valeur co-propre μ de A , on définit l'ensemble E_μ par

$$E_\mu := \{X \in \mathbb{C}^n \mid A\bar{X} = \mu X\}.$$

Est-ce que l'ensemble E_μ est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$?

3. Exemples :

- Vérifier que l'ensemble des valeurs co-propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est vide.
- Montrer que si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ , alors λ est une valeur co-propre de A .

4. Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\bar{A}$:

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A , le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\bar{A}$.
- Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A\bar{A}$ et X un vecteur propre associé : $A\bar{A}X = \lambda X$. Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :
 - les vecteurs $A\bar{X}$ et X sont liés ;
 - les vecteurs $A\bar{X}$ et X sont linéairement indépendant.
- En déduire que pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A , il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\bar{A}$.

5. Indépendance des vecteurs co-propres :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n , soient $X_1, X_2, \dots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associées à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$; l'entier k est inférieur ou égal à l'entier n ($k \leq n$).

Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p , $p = 1, 2, \dots, k$ ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \implies |\mu_p| \neq |\mu_q|$), alors la famille $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est libre de $\mathbb{C}^n$.

6. Cas d'une matrice triangulaire :

Dans cette question, la matrice $A = (a_{kj})_{1 \leq k, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice *triangulaire*.

- Rappeler les valeurs propres de A . Écrire les valeurs propres de $A\bar{A}$ en fonction de celles de A .
- Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A , alors pour tout réel θ , le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A .
- Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A , il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A .

7. Une relation d'équivalence :

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n , ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \iff \exists S \in GL_n(\mathbb{C}) : B = SAS^{-1}.$$

- Montrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que deux matrices co-semblables ont les mêmes valeurs co-propres.

8. Caractérisation des matrices co-semblables à I_n :

- Pour une matrice S de $GL_n(\mathbb{C})$, on pose $A = S\bar{S}^{-1}$. Calculer la matrice produit $A\bar{A}$.
- Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A\bar{A} = I_n$.

Montrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta) = e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I_n$, soit inversible.

Calculer en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $A\bar{S}(\theta)$ puis déduire la matrice $S(\theta).\bar{S}(\theta)^{-1}$.

FIN DU PROBLÈME