

PREMIER EXAMEN
Section : MP 2

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Durée : 2 heures

L'épreuve comporte trois pages.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème tous indépendants.

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{k}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice

Soit E un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On note π_u le polynôme minimal de u et $Tr(u)$ sa trace.

On se propose de montrer l'équivalence entre

(i) u est nilpotent

(ii) $Tr(u^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii)
2. Justifier que si $v \in L(E)$ vérifiant $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ est stable par u .
3. Dans cette question, on veut établir l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $Tr(u^p) = 0$. On écrit $\pi_u = X^k Q(X)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{k}[X]$ tels que $Q(0) \neq 0$. Soit

$$F = \ker(u^k) \quad \text{et} \quad G = \ker(Q(u))$$

- (a) Montrer que les sous-espaces F et G sont stables par u et vérifient $E = F \oplus G$.
- (b) On note u_F (resp u_G) l'endomorphisme de F (resp G) induit par u . Montrer que

$$u_F \text{ est nilpotent et } Q(u_G) = 0_{L(G)}$$

- (c) Montrer que si G n'est pas réduit à $\{0\}$, alors
 - i. Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $Tr(u_G^i)$ soit non nulle.
 - ii. $Tr(u^i)$ est non nulle (Indication : on pourra étudier la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$)
- (d) Montrer par l'absurde que $G = \{0\}$. Conclure.

Problème

La matrice exponentielle de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est $e^A = \exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$. On rappelle que :

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ vérifiant $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

1. (a) Montrer que pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{k}^n$, $\exp \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp(\alpha_n) \end{pmatrix}$.
 (b) Justifier que $\exp A$ est inversible et que $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. Soit v un réel et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 (a) Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres.

$$a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

 (b) Calculer $\Psi(iv)$ et $\Psi(e^{iv})$ puis déduire que $\exp(vJ) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$.
3. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.
 (a) Justifier que l'endomorphisme $M \longmapsto PMP^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est une application continue.
 (b) En déduire que

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$$
4. (a) Montrer que si T est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, alors $\exp T$ est triangulaire supérieure. Donner les valeurs propres de $\exp T$ en fonction de celles de T .
 (b) Démontrer que

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$$
5. Répondre par vrai ou faux; en justifiant votre réponse :
 (a) L'application $M \mapsto \exp(M)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{k})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{k})$ est injective.
 (b) L'application $M \mapsto \exp(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Partie II

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

6. Montrer que $\exp A$ est diagonalisable.
7. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les différentes valeurs propres de A ($1 \leq r \leq n$). On considère l'application linéaire Φ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$Q \longmapsto (Q(e^{\lambda_1}), \dots, Q(e^{\lambda_r}))$$

 Déterminer le noyau de Φ , puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $L(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.
8. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A . Montrer que $D = L(\exp D)$; en déduire que

$$A = L(\exp A)$$
9. Montrer que si $\exp A$ est diagonale, alors A est diagonale.
10. En utilisant la question 2, trouver une matrice diagonalisable M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp M$ est diagonale et M n'est pas diagonale.

Partie III

On considère f et g deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$

11. Démontrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f
12. Montrer que pour tout λ valeur propre de g , il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(g)$ formée par des vecteurs propres communs à f et g .
13. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formée par des vecteurs propres communs à f et g .
14. Montrer que si A et B sont deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$, alors il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Partie IV

Dans cette partie, A et B sont deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\exp A = \exp B$.

15. Montrer qu'il existe deux polynômes Q et S de $\mathbb{R}[X]$ tels que $A = Q(\exp A)$ et $B = S(\exp A)$.
16. En déduire que $AB = BA$.
17. Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.
18. Justifier que $\exp(P^{-1}AP) = \exp(P^{-1}BP)$. Déduire que $A = B$.

Fin de l'énoncé.