



Devoir de contrôle n°1: Mathématique I.

Exercice .

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit pour tout $P \in E$,

$$N_{\infty}(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_1(P) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\theta_k(P)|, \quad \text{où } \theta_k(P) = \int_0^1 t^k P(t) dt.$$

1. (a) Justifier l'existence de $N_{\infty}(P)$ et $N_1(P)$ pour tout $P \in E$.

(b) Montrer que N_{∞} et N_1 sont des normes sur E .

(c) N_1 et N_{∞} sont-elles équivalentes ?

Dans toute la suite, on munit E de la norme N_{∞} .

2. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur E vérifiant la propriété suivante:

$$\exists (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E \text{ tels que } N_{\infty}(P_n) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(P_n) = +\infty. \quad (*)$$

on pose

$$\mathcal{H} = \ker(\varphi) = \{P \in E \mid \varphi(P) = 0\}.$$

(a) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0, \quad Q_n = \frac{P_n}{\varphi(P_n)} - Q \in \mathcal{H}.$$

(b) Déterminer la limite de la suite $(Q_n)_{n \geq n_0}$. En déduire que $\mathcal{H}$ n'est pas un fermé de E .

3. Soit $\mathcal{D} = \{P \in E \mid P'(1) = 0\}$

(a) En utilisant ce qui précède, montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas un fermé de E .

(b) Soit $Q \in E$. Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(t) = Q(t) - \frac{t^n}{n} Q'(1) \in \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est une partie dense dans E .

Problème .

Partie I

1. Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\gamma_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente. On note γ sa limite.

(ind. On pourrait commencer par chercher un équivalent simple de $\gamma_n - \gamma_{n-1}$)

2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ est convergente de somme γ .

Partie II

On pose pour tout $n \geq 1$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right)$.

3. Vérifier que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. En déduire un équivalent simple de r_n .

4. Etudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n \geq 1} r_n, \quad (b) \sum_{n \geq 2} \frac{r_n}{\ln(n)}, \quad (c) \sum_{n \geq 1} (-1)^n r_n.$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $I_k = \int_k^{k+1} \frac{t - [t]}{t^2} dt$, où $[t]$ désigne la partie entière de t .

- (b) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$ converge et calculer sa valeur en fonction de γ .

Partie III

6. (a) Soit $x > 0$. Justifier l'existence de $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- (b) Montrer que R est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $R'(x)$ pour tout $x > 0$.

7. (a) Montrer que $R(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

- (b) Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. En déduire que $R(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

- (c) Montrer que R est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} R(x) dx = 1$.

8. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

- (a) Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} dt$ converge et $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} dt = \int_{\alpha\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = R(\alpha\varepsilon)$.

2. En déduire que $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ converge et $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du$.

- (b) Montrer, à l'aide d'un encadrement, que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$.

- (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ converge et déterminer sa valeur.

Partie IV

On désigne par φ la fonction définie sur $] -\infty, 1[$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

9. (a) Montrer que φ est continue sur $] -\infty, 1[$.
 (b) Montrer que $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge. On note $J = \int_0^1 \varphi(t) dt$.
10. Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du$, où $h(u) = 1 - \frac{1 - e^{-u}}{u}$.
 (**ind.** on pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(1 - t)$)
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Psi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto h(t) e^{-nt}$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Ψ_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \Psi_n(t) dt = \frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

- (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\left| \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \Psi_k(t) - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} h(t) dt \right| \leq \frac{M}{n+1}.$$

- (b) En déduire que $J = \gamma$.
