

Devoir de Synthèse n.1 (Analyse)

Exercice. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n \geq 0}$ continues sur $[a, b]$ et qui converge simplement sur $[a, b]$ vers la fonction nulle.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si pour tout $n \geq p$, la fonction f_n est décroissante sur $[a, b]$, alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

2) On suppose dans cette question que pour tout $x \in [a, b]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est uniforme sur $[a, b]$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\alpha_n = \|f_n\|_\infty$. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

On admet qu'une telle suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Vérifier que pour tout $n \geq p$,

$$0 \leq f_n(x_n) \leq f_p(x_n).$$

d) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$. Conclure.

Problème 1. Dans tout le problème, p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p .

On désigne par O_p la matrice nulle d'ordre p et I la matrice unité d'ordre p .

Pour toute matrice $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ non nulle, on définit l'application Ψ_D sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$\text{Pour tout } M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad \Psi_D(M) = MD.$$

Considérons l'application

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$A = (a_{ij}) \longrightarrow \|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \left(\sum_{j=1}^{j=p} |a_{ij}| \right).$$

Partie 1.

Soit $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ non nulle. Posons

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}); MD = O_p\}.$$

1) Montrer que l'application $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$.

2) Montrer que Ψ_D est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3) Déterminer l'adhérence de $\mathcal{F}$.

4) La partie $\mathcal{F}$ est-elle compacte dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$? Justifier votre réponse.

5) Montrer que l'intérieur de $\mathcal{F}$ est vide.

6) Prouver que la partie $\mathcal{F}$ est connexe par arcs dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie 2.

1) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$.

a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} A^n$ est convergente.

b) Soit $D = I - A$. Vérifier que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \Psi_D \left(\sum_{k=0}^{k=n} A^k \right) = I - A^{n+1}.$$

c) En déduire que la matrice $(I - A)$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

d) Prouver que

$$\frac{1}{\|I - A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

3) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et on suppose que A possède au moins une valeur propre réelle λ .

a) Montrer qu'on a nécessairement : $|\lambda| \leq \|A\|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$.

c) Prouver que si la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle alors $(I - A)$ est inversible.

4) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

La suite $(A^n)_{n \geq 0}$ converge vers la matrice nulle **si et seulement si** la série $\sum_{n \geq 0} A^n$ est convergente.

Problème 2.

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par

$$f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}, \quad g_n(x) = \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad \text{et} \quad g_0(x) = \frac{1}{x}.$$

Partie 1.

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (\ln(f_{n+1}) - \ln(f_n))$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2) En déduire que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction notée Γ définie et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

4) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) En utilisant la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Partie 2. On se propose d'étudier la fonction $S : x \rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ où $g_n(x) = \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
- 3) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) \geq 1.$$

- 4) Étudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ sur $]0, +\infty[$.
- 5) Justifier que la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.
- 6) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$S(x+1) = xS(x) - 1.$$

- 7) En déduire un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0.
- 8) Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $+\infty$.
- 9) Soit $x > 0$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{(x+k)}.$$

- b) En déduire que

$$S(x) = e \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

- c) Prouver alors que

$$S(x) = e \cdot \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- 10) Montrer que la fonction S est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Partie 3. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que : $f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

- 1) Vérifier que la fonction $h_n : u \rightarrow (1-u)^n u^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
- 2) Utiliser la partie 2, la question 9) a) pour montrer que

$$f_n(x) = n^x \left(\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du \right).$$

- 3) En déduire que

$$f_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

- 4) On rappelle que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. En admettant que pour tout $y > -1$, $\ln(1+y) \leq y$, montrer que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- 5) En utilisant la partie 2, prouver qu'au voisinage de 0^+ ,

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}.$$

Fin de l'épreuve $\square$