



L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

PROBLÈME I : Détection et mesure des amplitudes des ondes sismiques

Un séisme est un phénomène géologique qui se produit lorsqu'il y a une libération très rapide d'énergie accumulée dans les plaques tectoniques terrestres, ce qui génère des vibrations ou des ondes sismiques qui se propagent à travers la croûte terrestre. La surveillance sismique et la préparation aux tremblements de terre sont essentielles pour réduire les risques pour la vie.

Sismographe vertical

Un sismographe est un instrument scientifique utilisé pour mesurer les vibrations et les ondes sismiques générées par les tremblements de terre. Les ondes mécaniques produites par un séisme sont de différentes natures. Les ondes volumiques (ondes Primaire et Secondaire) sont les plus rapides et ont des fréquences qui varient entre 0,2 et 10 Hz. À l'inverse, les ondes surfaciques (ondes de Love et de Rayleigh) sont les plus lentes mais les plus dévastatrices, avec des fréquences allant de 2 mHz à 0,2 Hz.

Le sismographe étudié dans cette partie est constitué d'un bâti rigide de hauteur h , solidaire au sol, auquel est suspendu une masse m par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide L_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ (figure 1).

Lorsqu'une onde sismique traverse le sol, elle déclenche un mouvement de vibration vertical de la masse m .

Une secousse sismique sinusoïdale de pulsation ω crée un mouvement vertical du sol repéré par la cote $Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$

dans un référentiel $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ supposé galiléen, ce qui déclenche

un mouvement de la masse m par rapport au sol, caractérisé par la fonction $z(t)$.

À un instant t , le ressort a pour longueur $L(t)$. L'amortisseur exerce sur la masse m une force de

frottement visqueux $\vec{f} = -\lambda \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z$.

Q1. Déterminer, en l'absence de secousse sismique, la longueur du ressort à l'équilibre L_{eq} en fonction de L_0 , k , m et g . En déduire la cote de la masse z_{eq} repérée par rapport au bâti.

On note $u(t) = z(t) - z_{eq}$ l'écart par rapport à la position d'équilibre de la masse m .

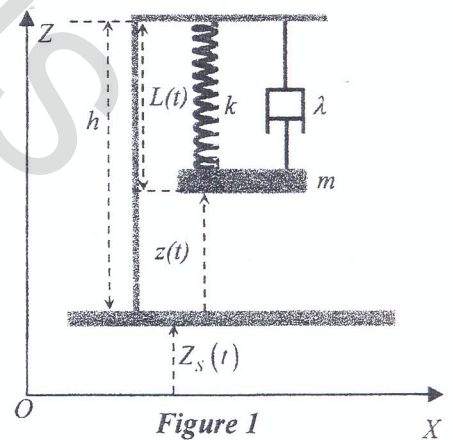


Figure 1

Q2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ lors d'une secousse sismique s'écrit sous la

forme
$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega^2 Z_s(t).$$

où ω_0 et Q sont deux constantes à exprimer en fonction de k , m et λ . Donner les significations physiques et les dimensions de ces deux grandeurs.

Q3. On se place en régime permanent sinusoïdal et on utilise la notation complexe : $\underline{u} = U_0 \exp j(\omega t + \varphi)$ avec $j^2 = -1$. Écrire l'équation du mouvement de la masse m en notation complexe.

En déduire l'expression de la fonction de transfert du sismographe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_s}$.

Q4. Quelle est la nature du filtre qui décrit le comportement du sismographe ? justifier votre réponse.

Q5. Déterminer l'expression de l'amplitude U_0 . Quelles sont les deux conditions portant sur la fréquence et les rapports $\frac{k}{m}$ et $\frac{\lambda}{m}$ pour que l'amplitude maximale U_0 soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. Déterminer dans ce cas le déphasage entre le mouvement de la masse m et celui du sol.

Q6. Déterminer l'expression du Gain en décibels G_{dB} . Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $Q = 0,5$ et $Q = 2$ en précisant les asymptotes aux basses et aux hautes fréquences.

Q7. Expliquer pourquoi les sismologues choisissent un facteur Q égal à $1/\sqrt{2}$. Justifier le choix de cette valeur.

Filtrage du signal de sortie du sismographe

La vibration de la masse m est amplifiée et enregistrée par un mécanisme de mesure ou un transducteur. Afin de supprimer les parasites de hautes fréquences du signal en sortie du sismographe, on utilise un filtre actif à structure de Rauch constitué d'un amplificateur opérationnel, supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire (A.L.I.), de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 et de trois résistors identiques de résistance R (figure 2). Les signaux d'entrée et de sortie s'écrivent respectivement en notation complexe :

$$\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{s}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

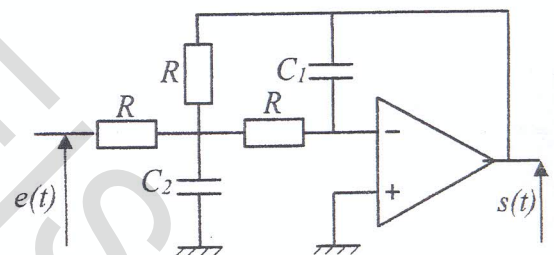


Figure 2

Q8. Donner les circuits équivalents en hautes et basses fréquences. En déduire la nature du filtre.

Q9. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Où H_0 , ω_0 et Q sont des constantes à exprimer en fonction de R , C_1 et C_2 .

Q10. Calculer Q et ω_0 pour $R = 100 \Omega$, $C_1 = 10 \mu F$ et $C_2 = 25 \mu F$.

Q11. Déterminer l'expression du Gain en décibels G_{dB} . Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude du filtre en précisant les asymptotes aux basses et aux hautes fréquences.

Q12. La numérisation des signaux sismiques filtrés nécessite une opération d'échantillonnage. Rappeler le critère de Nyquist-Shannon et donner la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage des signaux filtrés en supposant négligeables les amplitudes des signaux de pulsations supérieures à ω_0 .

PROBLÈME II : Étude d'une machine asynchrone

Les machines asynchrones sont utilisées dans de nombreuses applications industrielles et domestiques, notamment dans les pompes, ventilateurs, compresseurs, ascenseurs, et plus encore.

Cette machine se compose principalement de deux parties :

- le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant $\vec{B}(t)$,
- le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface S mobile autour d'un axe.

Étude du stator

Soit un ensemble de trois bobines (figure 3), dont les axes sont perpendiculaires à Oz et régulièrement décalés de $\frac{2\pi}{3}$. Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation ω_s dont les intensités sont les suivantes :

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_0 \cos(\omega_s t) ; i_2(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) ; \\ i_3(t) &= I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

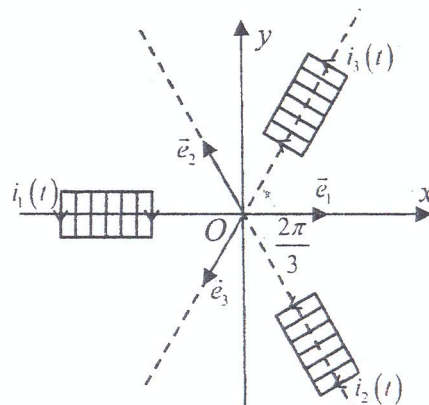


Figure 3

La fréquence d'alimentation de ces bobinages statoriques est égale à $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$. Chaque bobine crée en O un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme : $\vec{B}_k(t) = K i_k(t) \vec{e}_k$ (K est une constante qui s'exprime en H.m^{-2} et $\vec{e}_k$ est le vecteur unitaire de l'axe de la $k^{\text{ème}}$ bobine).

Q13. On donne le théorème de Ferraris :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\omega_s t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{e}_{k+1} = \frac{p}{2} (\cos(\omega_s t) \vec{e}_x + \sin(\omega_s t) \vec{e}_y).$$

En déduire que les 3 bobines créent au point O un champ tournant $\vec{B}$ dont on donnera l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Q14. Donner la norme du champ $B_0 = \|\vec{B}\|$ en fonction de K et I_0 . Préciser la vitesse angulaire de rotation du champ et calculer sa valeur numérique en tours par minutes (tour/min).

Entraînement du rotor

Q15. Le rotor, modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface S orientée selon la normale $\vec{n}$, tourne autour d'un axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω ($\omega \geq 0$) (figure 4).

Le champ magnétique $\vec{B}$ généré par le stator est supposé constant au niveau du cadre. Exprimer le flux ϕ de $\vec{B}$ à travers le cadre en fonction de B_0 , S , ω , ω_s et t . En déduire la force électromotrice d'induction $e(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction du flux maximum $\phi_0 = B_0 S$, de la vitesse angulaire de glissement $\Omega = \omega_s - \omega$ et de t .

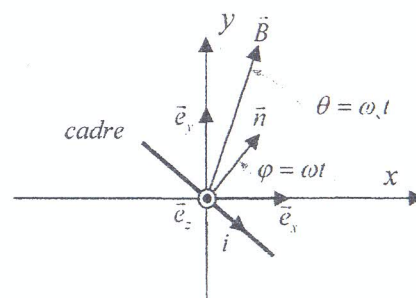


Figure 4

Q16. Le cadre constitue un circuit série de résistance R et d'inductance L . Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ induit dans le cadre. L'orientation de l'intensité du courant induit est indiquée sur la figure 4 sur laquelle la spire est vue de dessus.

Q17. On se place en régime permanent sinusoïdal. L'intensité dans le cadre s'écrit alors $i(t) = I_M \sin(\Omega t - \psi)$. En utilisant la notation complexe, montrer que :

$$\underline{i}(t) = I_M e^{j(\Omega t - \psi - \frac{\pi}{2})} = \frac{\phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$$



Q18. Exprimer $\cos(\psi)$ en fonction de Ω , R et L et préciser le signe de $\sin(\psi)$.

Q19. On donne $\phi_0 = 10^{-3} \text{ T.m}^2$ et $L = 100 \text{ mH}$. Donner la valeur numérique de la valeur efficace de $i(t)$ dans le cas où $R \ll L\Omega$.

Q20. Le moment magnétique du rotor s'écrit $\vec{M} = S i(t) \vec{n}$. En déduire le couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre puis sa projection Γ sur l'axe de rotation (Oz) en fonction de S , B_0 , I_M , ψ , Ω et t .

Q21. On donne la relation de trigonométrie suivante : $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

Montrer que la valeur moyenne de Γ , notée Γ_m , est donnée par :

$$\Gamma_m = \left(\frac{\phi_0^2}{2L} \right) \frac{RL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2}$$

Q22. L'allure de la courbe de variation de Γ_m en fonction de ω est représentée à la figure 5 :

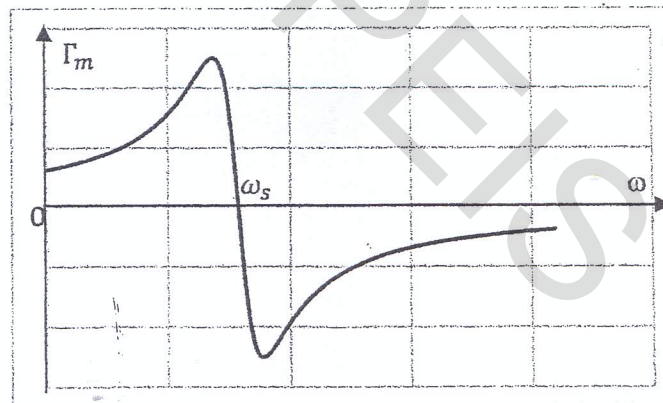


Figure 5

À quoi correspond physiquement la limite de Γ_m quand ω tend vers 0 ? Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou au contraire résistant ?

Fin de l'énoncé