

Données utiles

- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} F.m^{-1}$ et sa perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$
- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3 10^8 m.s^{-1}$
- Charge élémentaire $e = 1,6 10^{-19} C$
- Masse de l'électron $m_e = 9,1 10^{-31} kg$
- Masse du proton $m_p = 1,67 10^{-27} kg$
- $\vec{rot}(\vec{rot} \vec{u}) = \vec{grad}(\vec{div} \vec{u}) - \Delta \vec{u}$
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est supposé galiléen. La terre est entourée d'une atmosphère assimilable au vide et d'une couche haute située entre 60 km et 300 km d'altitude appelée ionosphère. Sous l'effet de rayonnement solaire, il s'est produit une photo-ionisation d'une partie de molécules présentes. Ainsi, l'ionosphère se comporte comme un plasma constitué par des ions positif de masse m_p et des électrons de masse m_e , de concentrations égales.

Le gaz, comporte N porteurs de charge par unité de volume, et assez dilué de sorte que les particules puissent être considérées comme libres (on néglige toute interaction mutuelle). Cela signifie en particulier, que sa permittivité électrique et sa permittivité magnétique sont celle du vide. Le poids des porteurs de charges sera considéré négligeable.

Propagation d'une onde électrique dans un plasma

Le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de champ électrique : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$ où $\vec{E}_0$ est un vecteur uniforme est constant.

Q1. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide en présence de densités volumiques de charges $\rho(M, t)$ et de courants $\vec{j}(M, t)$

Préciser la signification physique de chacune de ces équations.

Q2. Déterminer l'équation du mouvement d'un électron animé d'une vitesse $\vec{v}_e$ et celle d'un ion animé d'une vitesse $\vec{v}_p$ relativement au référentiel $\mathcal{R}$

Q3. Justifier qu'on peut négliger la force magnétique, exercée sur les porteurs de charges, devant la force électrique.

Q4. Déterminer en régime forcé les expressions de $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_p$.

Q5. Compte tenu des masses des porteurs de charges, déduire l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}(M, t)$.

Q6. Montrer que la conductivité complexe du milieu s'écrit : $\underline{\gamma} = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}}$ pulsation plasma. Calculer ω_p pour $N = 6,1 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$

Q7. On se place en régime sinusoïdal permanent avec $\omega \neq \omega_p$.

Montrer alors que la densité volumique de charges est nulle.

En déduire la structure de l'onde dans le plasma.

Q8. Etablir l'équation de propagation satisfaite par le champ électromagnétique.

Q9. Déterminer la relation de dispersion dans le plasma étudié.

Q10. On définit l'Indice complexe du plasma par $\underline{n} = \frac{c}{\omega} \underline{k}$.

Déterminer les expressions de $\underline{n}$ dans les deux cas : $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

Q11. Pour quelles fréquences, l'onde électromagnétique se propage sans atténuation dans l'ionosphère ? Citer une application de ce phénomène.

Q12. Donner dans ce cas, les expressions réelles des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. On suppose que $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$.

Q13. Déterminer les vitesses de phase v_φ , et de groupe v_g . Représenter ces vitesses en fonction de ω .

Q14. Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$.

Q15. Déterminer la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ et de la densité d'énergie cinétique $\langle e_c \rangle$.

Q16. En déduire la vitesse v_e de transport de la densité d'énergie moyenne totale.

Q17. Dans le cas où $\omega < \omega_p$, déterminer l'expression du champ électrique de l'onde dans le plasma. Commenter. Citer une application de ce phénomène.

Propagation d'une onde électromagnétique entre le sol et l'ionosphère

Une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée rectilignement est émise depuis la surface terrestre suivant la direction (Oz) normale à l'interface atmosphère - ionosphère. On néglige l'effet du champ magnétique terrestre.

Sur l'interface ($z = 0$), l'onde incidente de champ électrique $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$ donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise de champs respectifs $\vec{E}_r(M, t) = E_{0r} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{u}_x$ et $\vec{E}_t(M, t) = E_{0t} \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$.

Q18. Déterminer les expressions des champs magnétiques $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ ces ondes.

Q19. Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude du champ électrique à l'interface atmosphère- ionosphère en fonction de l'indice n du plasma.

Q20. Déterminer, à l'interface ($z = 0$), les moyennes temporelles des vecteurs de Poynting incident réfléchi et transmis.

En déduire les expressions des facteurs de réflexion et de transmission en puissance notés respectivement R et T, en fonction de r , t et n .

Q21. Déterminer explicitement n , puis R et T dans les deux cas: $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

Commenter les résultats.

Q22. Dans la transmission des ondes radio, on utilise différentes bandes de fréquences:

Bande AM (Modulation d'Amplitude) : [540 kHz, 1600 kHz]

Bande FM (Modulation de Fréquence) : [88 MHz, 108 MHz]

Comparer la portée de chaque Bande.

Rayonnement dipolaire - Diffusion d'un rayonnement

Nous étudions dans cette partie la production d'une onde électromagnétique par un dipôle électrique oscillant. Cette étude permet de comprendre les aspects de la diffusion d'un rayonnement par un atome.

On considère le système de deux charges ponctuelles -q et +q. La charge -q est désormais fixe à l'origine O, la charge +q est située en un point S mobile sur l'axe Oz tel que $OS = a \cos(\omega t)$; a et ω représentent respectivement l'amplitude et la pulsation des oscillations.

Le système constitue un dipôle électrique oscillant qui crée une onde électromagnétique de pulsation ω en un point M repéré par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) ; $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ désignent les vecteurs unitaires associés. On suppose que la distance $r = OM$ est très grande devant a .

Q23. Sachant que la charge $+q$ est animée d'un mouvement non relativiste, quelle est l'approximation satisfaite par la longueur d'onde λ de l'onde émise par le dipôle oscillant ?

Q24. Les expressions des vecteurs champ électrique de l'onde créée par le dipôle en un point $M(r, \theta, \varphi)$ sont :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \cos \theta \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) \vec{u}_r + \sin \theta \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \vec{u}_\theta \right)$$

p , $\dot{p}$ et $\ddot{p}$ dépendent de la variable $\left(t - \frac{r}{c}\right)$; $\dot{p}$ et $\ddot{p}$ désignent respectivement la dérivée première et seconde par rapport au temps du moment dipolaire p .

Montrer que l'expression de $\vec{E}(M, t)$ est en accord avec la symétrie du problème.

Q25. Définir la zone de rayonnement du dipôle et déduire l'expression du champ électrique simplifiée dans cette zone.

Q26. L'onde électromagnétique possède localement la structure d'une onde plane progressive. Déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$.

Q27. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}(M, t)$, ainsi que sa valeur moyenne temporelle.

Q28. Montrer que l'intensité du rayonnement définie par $I = \langle \|\vec{R}(M, t)\| \rangle$, s'écrit sous la forme : $I(r, \theta) = I_0(r) \sin^2 \theta$; $I_0(r)$ est une fonction à déterminer.

Représenter le diagramme du rayonnement dipolaire.

Q29. Montrer que la puissance moyenne totale rayonnée, à travers une sphère de rayon r centrée sur le dipôle, s'écrit $P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$. Interpréter le fait que P ne dépend pas de r .

L'interaction d'un champ électrique variable avec la matière, induit des dipôles électriques oscillants. Le rayonnement de ces dipôles redistribue alors le signal incident. On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique incidente plane de champ électrique $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{u}_x$ avec un milieu dilué, non magnétique, linéaire, homogène et isotrope. Chaque électron d'un atome, de masse m , de charge $q = -e$ est repéré par rapport au noyau par $r = r_0 \exp(i\omega t)$.

Q30. Montrer que dans le cadre de l'approximation non relativiste, l'effet du champ magnétique est négligeable devant celui du champ électrique.

Q31. En adoptant le modèle de l'électron élastiquement lié, l'équation du mouvement de l'électron s'écrit en notation complexe :

$$m\ddot{r} + m\gamma\dot{r} + m\omega_0^2 r = -eE \exp(i\omega t)$$

γ est une constante positive, $\dot{r}$ et $\ddot{r}$ étant respectivement la dérivée première et seconde de r par rapport au temps.

Interpréter les différents termes de cette équation et citer les approximations adoptées.

Q32. Déterminer la solution de cette équation en régime forcé.

Q33. Dédurre l'amplitude complexe du moment dipolaire induit et le mettre sous la forme $p_0 = \alpha(\omega)\varepsilon_0 E_0$; $\alpha(\omega)$ est la polarisabilité complexe à la pulsation ω .

Q34. En déduire la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle oscillant P .

Q35. Déterminer la puissance moyenne surfacique ϕ_i de l'onde incidente.

Q36. Montrer que P est proportionnelle au flux surfacique incident ϕ_i :

$$P = \sigma(\omega)\phi_i \quad \text{où} \quad \sigma(\omega) = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 |\alpha(\omega)|^2$$

Le coefficient de proportionnalité $\sigma(\omega)$ représente la section efficace de diffusion totale (ce coefficient est équivalent à une surface émettrice qui s'exprime en m^2).

Q37. Pour la lumière visible, la pulsation ω est très faible devant ω_0 . Déterminer dans ce cas la section efficace $\sigma(\omega)$.

En déduire une interprétation de la couleur bleue du ciel. On suppose que pour le rouge $\lambda_R = 800nm$ et pour le bleu $\lambda_B = 400nm$.

Plasma soumis à un champ magnétique uniforme et constant

Le plasma précédent est maintenant plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme et constant $\vec{B}_0$

Les conditions de propagation dans le plasma de l'onde électromagnétique de champ électrique $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$ dépendent des orientations des champs et du vecteur d'onde par rapport à $\vec{B}_0$.

On se place dans le cas où $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ et $\vec{E}(M, t)$ possède les composantes E_x , E_y et E_z .

Q38. En régime sinusoïdal, montrer que la densité de charges $\rho = 0$. Déduire que la composante longitudinale E_z du champ électrique est nulle.

Q39. En se basant sur l'équation fondamentale de la dynamique pour un électron, montrer que la densité volumique de courant s'écrit:

$$\vec{j} = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)} \left(\vec{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E} \right)$$

où $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ désigne une pulsation.

Le milieu est-il isotrope ? Pourquoi ?

Q40. Déduire les expressions des composantes j_x et j_y de $\vec{j}$.

Q41. En exploitant les équations de Maxwell, obtenir une autre relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.

Q42. Montrer que les composantes du champ $\vec{E}$ vérifient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \alpha E_x - i\beta E_y = 0 \\ i\beta E_x + \alpha E_y = 0 \end{cases}$$

où α et β sont des fonctions de ω à expliciter.

Q43. Déduire la relation de dispersion du milieu.

Q44. Montrer que les solutions de cette équation s'écrivent :

$$\begin{cases} k_+^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right) \\ k_-^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right) \end{cases}$$

Dans la suite, on suppose que les solutions k_- et k_+ sont réelles

Q45. Quelles sont les polarisations des ondes planes correspondant respectivement à k_- et k_+ ? Justifier.

Q46. Expliciter les champs $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$.

Q47. Déterminer les conductivités $\underline{\gamma}_+$ et $\underline{\gamma}_-$ pour chacune de ces ondes.

Q48. Donner alors les indices optiques n_+ et n_- correspondants.

Q49. L'onde plane, polarisée rectilignement suivant Ox, arrive normalement en $z=0$ sur le plasma d'épaisseur ℓ .

Montrer que dans le plan $z=\ell$, cette onde reste toujours polarisée rectilignement, mais le plan de polarisation de l'onde subit une rotation d'un angle θ tel que $\tan(\theta) = \frac{k_+ - k_-}{2} \ell$.

Q50. Ce phénomène est appelé «effet Faraday». Citer un phénomène analogue en optique.