

Devoir de contrôle d'Algèbre N°2

Section: MP 2

Durée: 2h

Date: 1 Mars 2025

Nbre de pages: 3

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème :

Notations et définitions :

- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et de sa norme euclidienne canonique associée $\| \cdot \|$.
- On note, pour tout réel θ , $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n , et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Sp}(A)$ le spectre réel de A .
- On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *orthogonalement semblables* s'il existe une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Les candidats sont invités à utiliser les résultats suivants sans démonstration :

- ▷ l'application $\exp$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ▷ L'application $s \mapsto \exp(sA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{ds}(\exp(sA)) = A \exp(sA)$.
- ▷ Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
- ▷ On rappelle également que $\exp(0_n) = I_n$.
- ▷ Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(PMP^{-1}) = P \exp(M) P^{-1}$.
- ▷ $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$.
- L'objet du problème est d'établir l'égalité suivante :

$$\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}),$$

et d'en déduire une application.

Partie I- Etude du cas $n = 2$

1. Montrer que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \{\theta J \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
2. Montrer que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Montrer que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. (a) Calculer J^{2k} et J^{2k+1} , pour tout entier naturel k .
(b) Montrer que $\exp(\theta J) = R(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $\exp(\mathcal{A}_2(\mathbb{R})) = \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Partie II- Une caractérisation d'une matrice antisymétrique

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que si $\text{Sp}(S) = \{0\}$, alors S est nulle.
 - (b) On suppose que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle SV, V \rangle = 0$.
Montrer que S est nulle.
3. (a) Montrer que si A est une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AV, V \rangle = 0$.
(b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AV, V \rangle = 0$.

En utilisant une décomposition de la matrice A , établir de ce qui précède que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Partie III- L'inclusion $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que ${}^t \exp(A) = \exp({}^t A)$.
3. En déduire que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer alors l'inclusion $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Partie IV- Réduction des matrices antisymétriques

Dans cette partie, on fixe A une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$. On pourra utiliser II-3.a
2. On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(x) = Ax$, pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.
 - (b) Soient F un sous-espace vectoriel **non réduit à** $\{0_{n,1}\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, stable par f , et $\mathcal{B}_F$ une base orthonormale de F . On note f_F l'endomorphisme induit par f sur F .
 - i. Montrer que $F^\perp$ est stable par f .
 - ii. Montrer que la matrice de f_F selon $\mathcal{B}_F$ est une matrice antisymétrique.
 - (c) En raisonnant par récurrence sur n , montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs formés par

(0) et θJ , où $\theta \in \mathbb{R}$.

On pourra utiliser, **sans le justifier**, le résultat suivant :

Si f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors f admet une droite ou un plan stable.

▷ On vient de montrer que A est *orthogonalement semblable* à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\text{diag}(0_p, \theta_1 J, \dots, \theta_r J) \quad (*),$$

où p et r sont deux entiers naturels vérifiant $p + 2r = n$ et $\theta_1, \dots, \theta_r$ sont des réels.

3. Vérifier que toute matrice orthogonalement semblable à une matrice de la forme $(*)$ est antisymétrique.

Partie V- L'inclusion $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

1. En utilisant le théorème de la réduction des matrices orthogonales suivant:

Toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable à

$$\text{diag}(I_p, R(\theta_1), \dots, R(\theta_k), -I_q),$$

où p, q et k sont des entiers naturels vérifiant $p + 2k + q = n$ et $\theta_1, \dots, \theta_k$ sont des réels,

établir que toute matrice Ω de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonalement semblable* à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\text{diag}(I_p, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r)),$$

où p et r sont deux entiers naturels vérifiant $p + 2r = n$ et $\theta_1, \dots, \theta_r$ sont des réels.

2. Soient p et r sont deux entiers naturels vérifiant $p + 2r = n$ et $\theta_1, \dots, \theta_r$ des réels.

Montrer, en soignant la rédaction, l'égalité suivante :

$$\text{diag}(I_p, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r)) = \exp(\text{diag}(0_p, \theta_1 J, \dots, \theta_r J)).$$

3. Dédurre de ce qui précède l'inclusion $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

4. Conclure que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie VI- Une application.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|\exp(sA)V\| = \|V\|.$$

On se propose de montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|Ox\| = \|x\|$.

2. En déduire que $\exp(A) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

3. Pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $s \longmapsto \exp(sA)V$, et

$$\begin{aligned} \varphi_X &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \|X(s)\|^2. \end{aligned}$$

(a) Vérifier que X est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $X'(s) = AX(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi'_X(s) = 2\langle X'(s), X(s) \rangle$.

(c) Conclure.