

Exercice

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle :

$$y'' + qy = 0 \quad (1).$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. (a) Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 de (1) telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (1). Justifier que $\mathcal{S} = \text{vect}(y_1, y_2)$.

- (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1$.
2. (a) Montrer que, si y est une solution de (1) alors $z : t \mapsto y(t+T)$ est aussi une solution de (1).
- (b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)$.

Problème

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A)$ désigne la trace de A et χ_A désigne son polynôme caractéristique ($\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$).

Partie I (Questions préliminaire)

1. Dans cette question, on se propose de montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

- (a) En écrivant $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier que

$$AP_1 = P_1B \text{ et } AP_2 = P_2B.$$

- (b) Dédire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2)B$.

- (c) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $Q(\alpha) = \det(P_1 + \alpha P_2)$.

i. Justifier que $Q \in \mathbb{R}[X]$.

ii. Vérifier que $Q(i) \neq 0$.

iii. En déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $(P_1 + \beta P_2) \in GL_n(\mathbb{R})$.

- (d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\chi_M = \chi_N$.

(a) Montrer que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Dédire que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}); M^t M = I_n\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$.

$$\text{Montrer que, pour tout } (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \sum_{k=1}^n p_{ik}^2 = \sum_{k=1}^n p_{kj}^2 = 1$$

(c) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

i. Montrer qu'il existe un unique $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\begin{cases} p_{ij}^2 = 1 \\ p_{ik} = 0 \end{cases}$ pour tout $k \neq j$.

ii. Montrer que $p_{kj} = 0$ pour tout $k \neq i$.

(d) Dédire tous les éléments de $\mathcal{O}_2(\mathbb{Z})$.

4. Soient p et q deux entiers relatifs premiers entre eux.

(a) Justifier qu'il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_0 p + v_0 q = 1$

(b) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que

$$up + qv = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u = u_0 + kq \text{ et } v = v_0 - kp.$$

Partie II

5. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau

6. (a) Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

(b) Montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|ad - bc| = 1$.

7. On note $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}); ad - bc = 1\}$.

(a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

- (b) Déterminer l'ensemble des couples (c, d) telles que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$.
- (c) Déterminer l'ensemble des couples (c, d) telles que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.
- (d) Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux.
8. Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour chacune des matrices S , T et ST répondre aux questions suivantes :
- (a) La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si oui déterminer la diagonale correspondante ainsi que la matrice de passage qui la diagonalise.
- (b) Lorsque la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer la triangulaire correspondante ainsi que la matrice de passage qui la trigonalise.
- (c) La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si oui déterminer la diagonale correspondante ainsi que la matrice de passage qui la diagonalise.
- (d) Lorsque la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si oui déterminer la triangulaire correspondante ainsi que la matrice de passage qui la trigonalise.
9. On cherche les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_2$.
- (a) Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_2$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser les diagonales possibles semblables à A .
- (b) En déduire l'ensemble des matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_2$.
10. On cherche les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = -I_2$.
- (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = -I_2$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer $tr(A)$ la trace de A .
- (b) Donner la forme générale des matrices A solutions de $A^2 = -I_2$ en fonction des trois paramètres a , b et c et d'une relation liant les trois paramètres.
11. En utilisant la question (2) montrer que

$$A \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ telle que } A^2 = -I_2 \iff A \text{ semblable à } S = \begin{pmatrix} 0 & - \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$