

Devoir de contrôle du 2^{ème} semestre en Analyse

Date: 26/02/2025 _____ Durée: 2h _____ Nombre de pages: 3

- NB Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème

§ Introduction

• Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que f admet un *moment d'ordre un entier* $p \in \mathbb{N}$, si la fonction qui à $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas, on appelle *moment d'ordre* p de f , le nombre complexe $m_p(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) dt$.

• Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un *moment d'ordre un entier* $p \in \mathbb{N}$, si la série $\sum_{n \geq 0} n^p u_n$ est absolument convergente et dans ce cas, on appelle *moment*

d'ordre p de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le nombre complexe $\delta_p(u) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n^p u_n$.

• Ce problème est partagé en deux parties A et B indépendantes. Le but de la partie A (resp. de la partie B) est de construire une fonction non nulle (resp. une suite non nulle) dont tous ses moments d'ordre p (où $p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

§ Partie A

(1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue admettant pour tout $p \in \mathbb{N}$, un moment d'ordre p et on considère la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $x \mapsto \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-ixt) dt$.

Justifier que la fonction $\hat{f}$ est bien définie puis montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\hat{f}^{(p)}(0)$ en fonction du moment $m_p(f)$.

(2) Soit la fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto G(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

(a) Il est clair que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n(x)$ à coefficients réels tel que pour tout réel $x > 0$, $G^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) \exp(\frac{-1}{x})$.

(b) En déduire que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G^{(n)}(0) = 0$.

(c) La fonction G est-elle développable en série entière sur un voisinage de 0 ?

(3) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto g(x) = G(x-1)G(2-x)$. Vérifier que g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qu'elle est strictement positive sur $]1, 2[$ et qu'elle est nulle en dehors de cet intervalle.

(4) Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $x \mapsto h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 g(t) \exp(ixt) dt$.

(a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = \frac{i^n}{2\pi x^n} \int_1^2 g^{(n)}(t) \exp(ixt) dt$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction qui à $x \mapsto x^n h(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

(5) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction h admet un moment $m_p(h)$ d'ordre p .

(6) On admet ici que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(x) = g(x)$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $m_p(h) = 0$ puis conclure.

§ Partie B

• Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\varphi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ et on considère la suite

$(H_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Hilbert définie par: $H_0(X) = 1$ et $\forall n \geq 1$, $H_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k) = \frac{1}{n!} X(X-1) \dots (X-n+1)$.

• NB Pour des raisons similaires à celles de la fonction G de la partie A, on admet ici que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(1) = 0$.

♣ Sous-partie B-1

(1) Vérifier que: $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (1-x)^{\frac{-n}{2}}$.

(2) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $(1-x)^{\frac{-n}{2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(H_p\left(\frac{n}{2} + p - 1\right) \right) x^p$.

(3) Pour tout $x \in]-1, 1[$ et pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(H_p\left(\frac{n-1}{2} + p\right) \right) x^{n+p+1}$.

(a) Montrer que: $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}(x) \right)$.

(b) Montrer que: $\forall x \in]-1, 1[$, $\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}(x)| \right)$

(4) Soit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k\left(\frac{n+k}{2} - 1\right)$.

Montrer que: $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Indication: On pourra utiliser la partition

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}^2$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i + j + 1 = n\}$.

♣ **Sous-partie B-2**

Soit $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$: le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$.

(1) Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est convergente sur $\mathcal{D}$.

• Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et sous réserve de convergence, on pose: $\forall z \in \mathcal{D}, \Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,p} z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n,0} = a_n \text{ et si } p \geq 1, \text{ alors, } b_{n,p} = \left(\prod_{k=1}^p (n+k) \right) a_{n+p} = (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p}.$$

(2) Vérifier que: $\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ puis déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} b_{n,p} z^n$ est convergente sur $\mathcal{D}$ (donc, la fonction Φ_p est bien définie sur $\mathcal{D}$).

(3) Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $]-1, 1[$.

• On admet dans la suite que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

(4) Soit un réel $r \in]0, 1[$ et on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $t \mapsto f_n(t) = b_{n,p} r^n e^{int}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge

$$\text{uniformément sur } \mathbb{R} \text{ puis déduire que } \forall n, p \in \mathbb{N}, b_{n,p} r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_p(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta.$$

(5) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un réel $\lambda_p > 0$ et $N_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \geq N_p, |a_n| \leq \frac{\lambda_p}{n^p}$.

(6) (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} b_{n,p} x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$

$$\text{et trouver en particulier, la somme } \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,p}.$$

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} n^p a_n$ est absolument convergente et que tous les moments d'ordre p de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nuls.

Fin de l'épreuve