

Examen Deuxième semestre
Epreuve d'Analyse

A.U 2024/2025	Date : 05/05/2025	Durée : 4 heures
---------------	-------------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Notations et définitions

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « V.A.D » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, On pourra noter $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$ ou I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

- On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une V.A.D. On dit que X vérifie la condition (D_α) - dite de **dispersion d'ordre α** lorsque, quand n tend vers $+\infty$, $\mathbb{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X , autrement dit lorsque $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x)$.

- Pour une V.A.D X On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto E(\cos(tX)) \end{cases}$$

appelée **fonction caractéristique** de X .

$E(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire X .

- On appelle **sinus cardinal** la fonction définie, pour tout réel x , par $\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de V.A.D entières ($X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$), mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition (D_α) .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

appelée n -ième moyenne empirique des variables X_k .

- L'objectif du sujet est d'étudier quelques propriétés de la fonction caractéristique de V.A et d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n .

Partie I

"Intégrale de Dirichlet et Fonction caractéristique"

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(1+t^2)} dt.$$

Q.1 ▷ Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(x) dx$ converge.

Q.2 ▷ Montrer que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

Q.3 ▷ Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $g'' = f$.

Q.4 ▷ Montrer que l'on a la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g''(x) - g(x) = \frac{\pi}{2} - Ix, \quad \text{avec} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

Q.5 ▷ Trouver alors une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q.6 ▷ En déduire la valeur de I puis que $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

Si a et b sont deux réels, on note $K_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $K_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{b-a} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{2it}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Q.7 ▷ À l'aide de séries entières, montrer que $K_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit N un entier naturel et soit F_N la fonction définie, pour tout réel x , par $F_N(x) = \int_{-N}^N K_{a,x}(t) dt$.

Q.8 ▷ Montrer que F_N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'_N(x) = N \text{sinc}(Nx)$.

Q.9 ▷ Montrer que $\int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = \int_{Na}^{Nb} \text{sinc}(s) ds$.

Q.10 ▷ En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt$ dans le cas où $a < b$.

Q.11 ▷ Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini. On suppose que les réels $a, b, -a$ et $-b$ n'appartiennent pas à $X(\Omega)$. Montrer que

$$\frac{2}{\pi} \int_{-N}^N \Phi_X(t) K_{a,b}(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a < X < b) + \mathbb{P}(-b < X < -a).$$

Partie II

"Généralités sur les variables aléatoires"

Q.12 ▷ Montrer qu'une V.A.D X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

Q.13 ▷ Montrer que si une V.A.D X est bornée (il existe un réel $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$) alors pour tout $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, $\mathbb{P}(|X| = |x_n|) = 0$, puis que X est d'espérance finie.

Q.14 ▷ Montrer pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ que

$$\sum_{n=0}^p n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^p \mathbb{P}(X \geq n) - p \mathbb{P}(X \geq p+1)$$

Q.15 ▷ En déduire que pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a

X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge et que dans le cas

d'existence on a $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Q.16 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant (D_α) . Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

Q.17 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $E(f(X)) = 0$.

Q.18 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes, montrer que $X+Y$ est symétrique.

Partie III

"Deux sommes de séries"

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L: t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1-uz} du.$$

Q.19 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe C^∞ . Donner une expression simple de sa dérivée $n^{\text{ième}}$ pour tout $n \geq 1$.

Q.20 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1-t \leq |1-tz|$, et en remarquant que $\operatorname{Re}(z) < 1$ plus précisément encore que $1-t < |1-tz|$.

Q.21 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Q.22 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$

Q.23 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma(x) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) & \longmapsto |1 + ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], |1 + ue^{it}| \geq m_a$$

Q.24 ▷ Montrer que la fonction

$$F: t \in]-\pi, \pi[\longrightarrow \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du$$

est de classe C^1 et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

Q.25 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, F'(t) = -\frac{\tan(\frac{t}{2})}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

Q.26 ▷ Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Partie IV

"Fonction caractéristique de variables aléatoires symétriques"

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X .

Q.27 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$.

Q.28 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition (D_α) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n := \mathbb{P}(|X| \geq n)$.

Q.29 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt) \quad \text{puis} \quad \Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

Q.30 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} C$.

Q.31 ▷ Déduire que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

Q.32 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+ , $\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(t)$.

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Q.33 ▷ Soit Y une V.A. symétrique tel que X et Y indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

Q.34 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Q.35 ▷ En déduire que pour tout réel t ,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

Q.36 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?