

Devoir de contrôle d'Algèbre N°1
Section : MP 2

Durée : 2h

Date : Octobre 2025

Nbre de pages : 3

Notations

Le sujet est composé de trois parties.

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .
- f désigne un endomorphisme de E .
- On note Id_E l'endomorphisme identité de E et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E .
- On désigne par $\text{rg}(f)$ le rang de f .
- Pour λ une valeur propre de f , on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .
- Pour une base $\mathcal{B}$ de E , on note $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$ la matrice de f selon la base $\mathcal{B}$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On désigne par

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}.$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

- On désigne par $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes en f .
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MA = AM\}.$$

l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A .

On note également $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes en A .

- L'objet du problème est de rechercher la dimension de $\mathcal{C}(f)$, dans le cas où f est diagonalisable, de trouver une condition d'égalité entre $\mathcal{C}(f)$ et $\mathbb{K}[f]$, et de fournir une caractérisation des endomorphismes cycliques diagonalisables

Partie I : Dimension de $\mathcal{C}(f)$ dans le cas où f est diagonalisable

On se donne f un endomorphisme diagonalisable de E . On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \dots, m_p$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la somme directe

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f).$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Justifier que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement si $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g , pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

4. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe $M_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ telle que la matrice de g selon la base $\mathcal{B}$ soit de la forme diagonale par blocs

$$\text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_p).$$

5. Notons $\Psi : \mathcal{C}(f) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $g \longmapsto \text{Mat}(g, \mathcal{B})$.

(a) Vérifier que Ψ une application linéaire injective. Donner $\text{Im}(\Psi)$, l'image de Ψ .

(b) Dédurre que $\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{i=1}^p m_i^2$.

Partie II : Étude des endomorphismes cycliques

Dans cette partie, f est un endomorphisme cyclique de E , c'est-à-dire qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

1. Justifier qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f^n(x) = a_0x + a_1f(x) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(x).$$

2. On note A la matrice de f selon la base $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.

(a) Ecrire A .

(b) Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$

(c) Dédurre que tous les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

(d) Déterminer alors toutes les droites vectorielles stables par f .

3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f admet n valeurs propres distinctes.

4. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. On écrit $g(x) = b_0x + b_1f(x) + \dots + b_{n-1}f^{n-1}(x)$, où $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{K}$ sont des scalaires.

On pose $h = b_0 \text{Id}_E + b_1f + \dots + b_{n-1}f^{n-1}$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(f^k(x)) = h(f^k(x))$.

(b) Dédurre que $g = h$ et que $g \in \mathbb{K}[f]$.

(c) Conclure que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

5. Dans cette question, f est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence n , c'est-à-dire $f^n = \tilde{0}$ et $f^{n-1} \neq \tilde{0}$.

Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

(a) Démontrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

(b) Justifier alors que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

(c) Montrer que $\ker f$ est la seule droite stable par f .

Partie III : Cas d'un endomorphisme à n valeurs propres distinctes

Dans cette partie, on considère f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes qu'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On se propose d'établir l'égalité entre $\mathcal{C}(f)$ et $\mathbb{K}[f]$. On montrera après que f est cyclique.

1. (a) Justifier que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe v_i un vecteur non nul de E tel que $E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(v_i)$.
- (b) Vérifier que $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E et donner la matrice de f selon la base $\mathcal{B}'$.
- (c) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

Montrer qu'il existe $(\alpha, \dots, \alpha) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\text{Mat}(g, \mathcal{B}') = \text{diag}(\alpha, \dots, \alpha)$.

- (d) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $g = P(f)$.

(On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange).

- (e) Montrer que

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f] \text{ et que } \dim \mathcal{C}(f) = n.$$

2. On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Démontrer que la famille $(V, DV, D^2V, \dots, D^{n-1}V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- (b) Conclure que f est cyclique.
- (c) Retrouver que

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f] \text{ et que } \dim \mathcal{C}(f) = n.$$

3. Soit g un endomorphisme diagonalisable de E .

Montrer que g est cyclique si et seulement si g admet n valeurs propres distinctes.