

Devoir de synthèse d'Algèbre
Section: M.P.2



Durée: 2 heures

Date: 12 Décembre 2025

Nb de pages: 3

Exercice

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

On pose $\mathcal{A} = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Partie A

On pose $A = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Montrer que $\mathcal{A} = \text{vect}(I_3, A, A^2)$.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'ensemble de éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est:

$$\mathcal{U} = \{M(a, b, c); a + b + c \neq 0, \text{ et } a, b \text{ et } c \text{ ne sont pas tous égaux.}\}$$

Partie B

On pose $M = M(2, 1, 1)$ et $T(X) = X^2 - 5X + 4$.

1. (a) Montrer que $T = \pi_M$. Où π_M désigne le polynôme minimal de M .
 (b) Dédire que M est inversible et que $M^{-1} = M(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par T .
 (b) En déduire que $M^n = M(a_n, b_n, b_n)$ avec $a_n = \frac{4^n + 2}{3}$ et $b_n = \frac{4^n - 1}{3}$.
 (c) Justifier que a_n et b_n sont des entiers naturels.
3. On pose $G = \{M^n, n \in \mathbb{Z}\}$.
 (a) Montrer que $M^n = M(a_n, b_n, b_n), \forall n \in \mathbb{Z}$.
 (b) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe monogène non cyclique.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1. (a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A(X) = (X^n - 1)$.
 (b) Montrer que $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\}$.
 (c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. (a) Montrer que $A^n = I_n$ et déduire que A est inversible.
 (b) Soit $G = \{A^k, k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $G = \{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ et que G est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.
 (c) Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
 i. Vérifier que $sp_{\mathbb{C}}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$.
 ii. En déduire que $P = 0$.
 (d) Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $vect(G)$.
3. On considère le polynôme $P = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}$ et la matrice $B = P(A)$.
 (a) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 (b) En remarquant que $P = \frac{d}{dX} \left(\sum_{k=0}^n X^k \right)$, vérifier que $P(X) = n \frac{X^n}{X-1} - \frac{X^n - 1}{(X-1)^2}$.
 (c) Montrer que : $(A - I_n)^2 B = n(A - I_n)$.
 (d) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et λ une valeur propre de A .
 i. Justifier que $sp_{\mathbb{C}}(Q(A)) = \{Q(\lambda); \lambda \in sp_{\mathbb{C}}(A)\}$.
 ii. Vérifier que $1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \lambda_k)$.
 iii. Montrer que les valeurs propres de B sont $\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\lambda_1 - 1}, \dots, \frac{n}{\lambda_{n-1} - 1}$.
 (e) En déduire que $\det(B) = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$.
4. On se propose dans cette question de déterminer l'inverse de la matrice B .
 (a) On note χ_B le polynôme caractéristique de B . Justifier $\chi_B(0) \neq 0$.
 (b) Prouver que $B^{-1} \in vect(\{B^k, k \in \{0, \dots, n-1\}\})$.

(c) En déduire que $B^{-1} \in \text{vect}(G)$ et qu'il existe des nombres complexes $u_0, \dots, u_{n-1}$ tels

$$\text{que } B^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k A^k.$$

(d) En utilisant 2)c), prouver que

$$\begin{cases} u_2 = u_3 = \dots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = u_1 - u_2 = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(e) Calculer A^k , pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

(f) En calculant de deux façons la trace de la matrice B^{-1} , déterminer la valeur de u_0 .

(g) En déduire B^{-1} .