

Devoir de contrôle du 1^{er} semestre en Analyse

Date: 28/10/2025 _____ Durée: 2h _____ Nombre de pages: 2

• NB Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1

On considère l'intégrale généralisée $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$.

(1) Justifier que l'intégrale A est convergente.

(2) (a) Justifier que l'intégrale généralisée $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ est convergente et $A = B$.

(b) Montrer que $A + B = \frac{-\pi \ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(x)) dx$.

(c) En déduire que $A = \frac{-\pi \ln(2)}{2}$.

(3) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(\sin(t)) dt$. Montrer que $F(x) = o(\sqrt{x})$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application $N_a : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall P \in E, N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$.

1/ Montrer que: $\forall a \in \mathbb{R}$, l'application N_a est une norme sur E .

2/ Soient $a, b \in [0, 1]$. Montrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

3/ Soient $a, b \in [0, +\infty[$ tels que $a < b$ et $b > 1$. Montrer que les deux normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

Problème

§ Partie 1

• Soient deux suites numériques $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les trois conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{c}_1 / \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0 \\ \text{c}_2 / \text{Il existe } \ell \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \\ \text{c}_3 / \forall z \in \mathbb{C}, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} b_n z^n \text{ est absolument convergente} \end{array} \right.$$

(1) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

(2) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = +\infty$.

(3) (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |a_n - \ell b_n| \leq \varepsilon b_n$, puis montrer que: $\forall n \geq n_1$ et $\forall x > 0, |A(x) - \ell B(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n_1} |a_k - \ell b_k| x^k \right) + \varepsilon B(x)$.

(b) Montrer que: $\forall k \in \{0, \dots, n_1\}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{B(x)} = 0$.

(c) En déduire que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \ell$.

(4) Soit un réel $a > 0$.

(a) Montrer que: $\left(1 + \frac{\ln(a)}{n}\right)^{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^n \exp\left(\frac{-1}{2} (\ln(a))^2\right)$.

(b) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{\ln(a)}{n}\right)^{n^2} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et que:

$$S(a, x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{-1}{2} (\ln(a))^2\right) \exp(ax) \text{ avec } S(a, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\ln(a)}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}.$$

§ Partie 2 (Les suites B-convergentes)

• Soit une suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **B-convergente** si elle vérifie

les deux conditions suivantes:
$$\begin{cases} \text{c}_1 / \forall z \in \mathbb{C}, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} \frac{U_n}{n!} z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{c}_2 / \text{ Il existe } \ell \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} t^n \right) = \ell \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Dans ce cas, cette limite ℓ est appelée la **B-limite** de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on écrit $\mathbf{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$.

(1) (a) Montrer que la suite $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **B-convergente**

(b) Montrer que la suite $(4^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas **B-convergente**.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n(\lambda) = \lambda^n$.

(a) Vérifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(\lambda t)$ existe dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $(\lambda = 0 \text{ ou bien } \operatorname{Re}(\lambda) < 0)$.

(b) En déduire que la suite $(V_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ est **B-convergente** si et seulement si $(\lambda = 1 \text{ ou bien } \operatorname{Re}(\lambda) < 1)$. De plus, déterminer sa **B-limite** en cas de **B-convergence**.

(3) (a) Montrer que si la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors elle est **B-convergente** et que sa **B-limite** coïncide avec sa limite. **Ind.** Utiliser la partie 1 en prenant $a_n = \frac{U_n}{n!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$.

(b) Justifier que la réciproque de (a) est fausse.

(4) Soient un réel $a > 0$ et la suite $(W_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $W_0(a) = 0$ et $\forall n \geq 1, W_n(a) = \left(1 + \frac{\ln(a)}{n}\right)^{n^2}$. Étudier la **B-convergence** de la suite $(W_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, déterminer sa **B-limite** en cas de **B-convergence**.

Fin de l'épreuve