

Examen n° 1 Analyse



PROBLÈME :

Dans tout le problème,

— I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

— $\mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues par morceaux sur $[0, 1]$.

⊗ Le but de ce problème est d'étudier le comportement au voisinage de 0 de la somme de séries de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} f(e^{-nx})$ avec $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs et $f \in \mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R})$ sous certaines hypothèses précisées ultérieurement.

A. Calcul de l'intégrale de Gauss.

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que les f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

2. A l'aide d'un changement de variable montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = 2\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n-2} dt$.

3. Montrer que $0 \leq f_n(x) \leq f_1(x)$ pour tout réel x et $n \in \mathbb{N}^*$.

ind : 'On pourra vérifier tout d'abord que $(1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ '.

4. Montrer alors que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n};$$

5. En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. On rappelle l'équivalent de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

B. Deux cas particuliers

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}$.

6. Montrer que f et g sont définies et continues sur I
7. Trouver la limite de f en 0.
8. Justifier que pour tout $x \in I$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$ est convergente et trouver sa valeur en fonction de x .
9. Montrer que pour tout $x \in I$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$.
10. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
11. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)_{n \geq 1}$ converge.
12. On pose pour $x > 0$, $h(x) = \frac{f(x)}{1 - e^{-x}}$. Montrer que pour tout $x > 0$, $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$.
13. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
14. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \rightarrow 0$.
15. Montrer que f est de classe C^1 sur I et que $f' = -g$. Retrouver alors, par intégration, l'équivalent de f en 0.

C. Un Théorème Tauberien

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge et de somme $F(x)$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On munit $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ définie par la formule $\|\psi\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |\psi(t)|$.

Pour toute application $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1], \mathbb{R})$, on note L_f l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L_f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} f(e^{-nx}).$$

16. Montrer que F est une application continue sur $]0, +\infty[$.
17. Montrer que si $\ell > 0$ alors la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x \alpha_n e^{-nx}$ n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.
18. Montrer que L_f est bien définie pour tout $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1], \mathbb{R})$ et que l'application $L: f \mapsto L_f$ est une application linéaire sur $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1], \mathbb{R})$.
19. Vérifier que pour tous f_1, f_2 dans $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1], \mathbb{R})$, $f_1 \leq f_2$ entraîne $L_{f_1} \leq L_{f_2}$.
20. On suppose dans cette question que $\alpha_n = o(1)$ et soit $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1], \mathbb{R})$.
 - (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x \alpha_n e^{-nx} f(e^{-nx}) \right| \leq M \|f\|_{\infty} \sup_{n \geq N+1} \alpha_n$$

- (b) Dédire que $\lim_{x \rightarrow 0} x(L_f)(x) = 0$.

On note

$$\mathbb{E} = \left\{ f \in \mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow 0} x(L_f)(x) \text{ existe} \right\}, \quad \mathbb{E}_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow 0} x(L_f)(x) = 1 \right\}$$

et on pose pour tout $f \in \mathbb{E}$,

$$\Delta(f) = \lim_{x \rightarrow 0} x(L_f)(x).$$

21. Vérifier que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R})$.
 22. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R})$, $\Delta(f) = 0$ et que $\mathbb{E} = \mathcal{C}_M([0, 1], \mathbb{R})$.

• On suppose dans la suite que $\ell > 0$

23. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $e_p : t \in [0, 1] \rightarrow t^p$. Montrer alors que $e_p \in \mathbb{E}$ et que $\Delta(e_p) = \frac{\ell}{p+1}$.
 24. Montrer que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_\infty)$.
 25. Dédurre alors que $\mathbb{E}_1$ est un fermé et connexe par arcs de $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_\infty)$. $\mathbb{E}_1$ est-il compact?
 26. Montrer que si P est polynomiale sur $[0, 1]$, alors $P \in \mathbb{E}$ et que $\Delta(P) = \ell \int_0^1 P(t) dt$.
 27. Soit f une application continue sur $[0, 1]$ et $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers l'application f .
 (a) Justifier l'existence d'une telle suite.
 (b) Soit $n \geq 0$. Montrer que

$$\forall x > 0, |x(L_{P_n})(x) - x(L_f)(x)| \leq \|P_n - f\|_\infty x F(x)$$

$$\text{où } \|P_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} \{|P_n(t) - f(t)|\}.$$

- (c) Montrer alors que la suite d'applications $x \rightarrow x(L_{P_n})(x)$, ($n \geq 0$) est uniformément convergente sur $]0, 2]$ vers $x \rightarrow x(L_f)(x)$.

28. Dédurre que si f est une application continue sur $[0, 1]$, alors $f \in \mathbb{E}$ et on a $\Delta(f) = \ell \int_0^1 f(t) dt$.

29. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{e}$, on note

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e} - \varepsilon[, \\ \frac{ex-1}{\varepsilon} + e & \text{si } x \in [\frac{1}{e} - \varepsilon, \frac{1}{e}[, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1] . \end{cases}, \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[, \\ \frac{ex-1}{\varepsilon(1+\varepsilon e)} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, \frac{1}{e} + \varepsilon[, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e} + \varepsilon, 1] . \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1] . \end{cases}$$

- (a) Construire sur le même schéma les graphes de g_1 , g_2 et g .
 (b) Vérifier que g_1 et g_2 appartiennent à $\mathbb{E}$ et que

$$\Delta(g_1) = \left(1 + \frac{\varepsilon e}{2}\right) \ell \quad \text{et} \quad \Delta(g_2) = \left(1 - \ln(1 + \varepsilon e) + \frac{\varepsilon e}{2(1 + \varepsilon e)}\right) \ell.$$

- (c) En remarquant que $g_2 \leq g \leq g_1$, montrer alors que $g \in \mathbb{E}$ et que $\Delta(g) = \ell$.

30. (a) Calculer $L_g\left(\frac{1}{N}\right)$ pour tout entier $N > 0$.
 (b) En déduire la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \alpha_k$$

(Théorème Taubérien).