

Données utiles

Caractéristiques du vide

- Permittivité électrique : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} Fm^{-1}$
- Perméabilité magnétique : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Hm^{-1}$
- Célérité de la lumière : $c = 310^8 ms^{-1}$

Propriétés électriques du cuivre

- Conductivité électrique statique : $\gamma_0 = 5,8 \times 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$
- Temps de relaxation : $\tau = 1,87 \times 10^{-14} s$

Identité vectorielle utile : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{E})) - \Delta\vec{E}$

Exercice :

On cherche à déterminer le champ magnétique créé par diverses distributions orthoradiales de courant électrique continu circulant dans un cylindre de rayon a et de hauteur H .

On se place dans le cas où $a \ll H$ (cylindre illimité dans la direction Oz), de ce fait :

- On négligera les effets de bords.
- Le champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ à l'extérieur du cylindre est supposé nul.

Distribution volumique orthoradiale de courant

On considère un courant électrique circulant dans tout le volume du cylindre. En un point $M(r, \theta, z)$, la densité de courant volumique vaut :

$$\vec{J}_1 = \alpha r \vec{e}_\theta$$

Où α est une constante positive.

Cette distribution crée en M un champ magnétique $\vec{B}_1$.

Q1. Déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}_1$ et préciser les coordonnées dont dépend la valeur algébrique B_1 de ce champ.



- Q2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ en fonction de α, r et des constantes usuelles, pour toute coordonnée radiale r inférieur ou égal au rayon a .

Distribution surfacique orthoradiale de courant

Dans cette partie, le courant électrique ne circule que sur la surface latérale du cylindre. L'intérieur du cylindre est le vide (aucun courant volumique). Le courant est caractérisé par la densité de courant surfacique :

$$\vec{J}_s = J_s \vec{e}_\theta$$

où J_s est une constante uniforme et positive. Cette distribution de courant engendre à l'intérieur du cylindre un champ $\vec{B}_0$.

- Q3. Montrer qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ satisfait aux équations de Maxwell à l'intérieur du cylindre.
- Q4. Rappeler les relations de passage à une interface pour les composantes du champ magnétique.
- Q5. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_0$.

Problème I : Propagation des ondes électromagnétiques

Partie I : Onde plane dans le vide

Dans un repéré orthonormé direct ($Oxyz$), on considère une onde électromagnétique O_i progressive, plane, monochromatique, de pulsation ω , se propageant dans le vide illimité dépourvu de charges et de courants. Le champ électrique complexe associé à cette onde est :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[i(ky - \omega t)] \vec{e}_z$$

- Q6. Décrire cette onde (direction de propagation, polarisation, dépendances spatiale et temporelle).
- Q7. Écrire les équations de Maxwell dans ce milieu.
- Q8. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\underline{\vec{E}}$.
- Q9. Déterminer le vecteur d'onde $\vec{k}$ et exprimer sa norme en fonction de ω et c .
- Q10. Quelle est la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de l'onde ?
- Q11. Déduire la nature du milieu (dispersif ou non dispersif).
- Q12. Déterminer l'expression du champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}$ de cette onde.

Soit $\vec{R}$ le vecteur de Poynting et u_{em} la densité d'énergie électromagnétique.

- Q13. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$.
- Q14. Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est son unité dans le système international ?

Q15. Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur Poynting $\langle \vec{R} \rangle$.

Q16. Déterminer l'expression de la densité d'énergie électromagnétique u_{em} .

Q17. En déduire sa valeur moyenne temporelle $\langle u_{em} \rangle$.

Q18. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction de u_{em} .

Onde réfléchie sur un conducteur parfait

L'onde incidente arrive sous incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $z \geq 0$

Q19. Rappeler les caractéristiques du modèle du conducteur parfait.

Q20. Donner les expressions du vecteur d'onde $\vec{k}_r$ et du champ électrique $\vec{E}_r$ de l'onde réfléchie.

Q21. Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde réfléchie $\vec{B}_r$.

Q22. Déterminer en tout point du demi espace ($z < 0$), les champs électriques et magnétiques résultants. Identifier le type d'onde obtenu.

Q23. Déterminer le vecteur Poynting $\vec{R}$ de l'onde résultante. En déduire sa valeur moyenne temporelle. Conclure.

Q24. Déterminer les densités surfaciques de charge σ et de courant $\vec{J}_s$, qui peuvent apparaître sur la surface conductrice ($z = 0$).

Partie II : Onde électromagnétique dans un vide limité

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide limité par deux plans conducteurs parfaits d'équations $z = 0$ et $z = a$.

Le champ électrique de cette onde est donné en notation complexe par :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin(\alpha z) \exp[i(kx - \omega t)] \vec{e}_y$$

Q25. Déterminer l'expression de k^2 en fonction de ω , c et α .

Q26. Montrer que les conditions aux limites sur $\vec{E}$ imposent :

$$\alpha = m \frac{\pi}{a}$$

Q27. En déduire que la propagation n'est possible que si ω est supérieur à une pulsation de coupure ω_c que l'on déterminera.

Q28. Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de l'onde.

Problème II : Onde plane dans un conducteur

On considère un milieu globalement neutre, de perméabilité magnétique μ_0 , de permittivité électrique ϵ_0 et de conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$.

On s'intéresse à la propagation, dans ce milieu, d'une onde électromagnétique dont les champs sont donnés en notation complexe par :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp[i(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}} - \omega t)] \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 \exp[i(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}} - \omega t)]$$

où $\underline{\vec{k}} = k \underline{\vec{e}}_u$; $\underline{\vec{e}}_u$ étant le vecteur unitaire orienté dans la direction de propagation.

Structure de l'onde dans le conducteur

Q29. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré.

Q30. Déterminer la structure de l'onde électromagnétique dans ce milieu.

Q31. Montrer que :

$$\underline{k}^2(\omega) = \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) \left[1 + i\left(\frac{\underline{\gamma}}{\epsilon_0 \omega}\right)\right]$$

Modèle microscopique du conducteur

On considère un conducteur de conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 - i \omega \tau}$$

où : $\gamma_0 = \frac{N e^2 \tau}{m}$ est la conductivité en régime statique,

τ est le temps de relaxation du milieu

N est la densité volumique d'électrons libres (masse m , charge $-e$).

Q32. Exprimer, en fonction de ω et τ , le module du nombre complexe $\frac{\gamma_0 - \underline{\gamma}}{\gamma_0}$.

Q33. Montrer que, pour des fréquences $f < f_c = 8,5 \times 10^{10} \text{ Hz}$, on peut utiliser pour le cuivre, la valeur quasistatique $\underline{\gamma} = \gamma_0$ avec une erreur relative inférieure à 1%.

On se place dans le cas où $f < f_c$

Q34. Montrer que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

Q35. Montrer que le nombre d'onde complexe $\underline{k}$ vérifie alors :

$$\underline{k} = \pm \frac{(1 + i)}{\delta(\omega)}$$

où $\delta(\omega)$ est une grandeur dont l'expression est à déterminer en fonction de γ_0, μ_0 et ω .

L'onde électromagnétique se propage le long de l'axe Oz dans le sens des z croissants. On suppose $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$, où E_0 est une constante réelle positive.

Q36. Ecrire les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Q37. Donner les expressions de la vitesse de phase $v_\phi(\omega)$ et de l'amplitude $E_0(z, \delta(\omega))$ du champ électrique $\vec{E}$ de l'onde.

Q38. Ces expressions mettent en évidence deux phénomènes physiques, les préciser.

Q39. Calculer $\delta(\omega)$ pour le cuivre aux fréquences $f_1 = 50 \text{ Hz}$ et $f_2 = 10^{10} \text{ Hz}$.

Q40. Expliquer pourquoi un fil de cuivre de 1 mm de diamètre est adapté à la transmission de la fréquence f_1 . Est-ce que ce fil est adapté à la transmission de la fréquence f_2 .

Bilan énergétique

Q41. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$.

Q42. Trouver le flux moyen $\langle \Phi(\vec{R}) \rangle$ à travers une boîte cylindrique d'axe $z'z$, fermée par des sections circulaires S_1 et S_2 , d'aire S , situées respectivement dans les plans d'équations $z = z_1$ et $z = z_2$.

Q43. Écrire la densité de puissance dissipée par effet Joule $\frac{dP}{dt} = \vec{j}_c \cdot \vec{E}$. En déduire la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par effet Joule dans la boîte.

Q44. Comparer $\langle P \rangle$ à $\langle \Phi(\vec{R}) \rangle$.

Q45. En déduire $\langle \frac{dU_{em}}{dt} \rangle$ où U_{em} est l'énergie électromagnétique contenue dans la boîte.

Conduction à haute fréquence

On étudie dans cette partie la propagation d'ondes électromagnétiques à haute fréquence dans ce conducteur.

Q46. Écrire l'expression du module de la conductivité complexe $|\underline{\gamma}|$.

Q47. Montrer que pour les fréquences $f \geq f_c' = 8,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, la conductivité du cuivre est réduite d'un facteur supérieur ou égal 100 par rapport à sa conductivité γ_0 .

Dans la suite de cette partie, on se place dans le cas où $f > f'_c$.

On posera $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$

Q48. Donner l'expression approchée de $\underline{\gamma}$.

Q49. Quel modèle physique cela correspond-il pour les électrons de conduction ?

Q50. Calculer $\langle \vec{j}_c \cdot \vec{E} \rangle$ et conclure sur les pertes par effet Joule.

Q51. Déterminer dans ce cas l'équation de dispersion $k^2(\omega) = f(\omega)$.

Q52. Pour $\omega > \omega_p$, déterminer la vitesse de phase $v_\phi(\omega)$, la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ et l'indice de réfraction $n(\omega)$.

Q53. Pour $\omega < \omega_p$, écrire l'expression de $\underline{k}(\omega)$.

Q54. Dédurre l'expression de $\vec{E}$ et caractériser la nature de l'onde dans le cuivre.