

Devoir n° 1 Epreuve de mathématiques



Exercice

On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in E$, on définit l'application:

$$\begin{aligned} T_\varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt. \end{aligned}$$

1. Montrer que T_φ est une application linéaire sur E .
2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E , où

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 |f(t)| dt. \end{aligned}$$

3. Montrer que $\forall f \in E, |T_\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$, où $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|$.
4. En déduire que T_φ est continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

PROBLEME

Première partie:

Dans cette partie, on se propose de calculer la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.
 - (a) Montrer que $\forall x \geq 1, F(x) = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.
 - (b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente.
 - (c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.
 - (d) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.

- (a) Justifier l'existence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
(Indication: $\sin a - \sin b = 2 \sin(\frac{a-b}{2}) \cos(\frac{a+b}{2})$).

3. On définit l'application φ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$.
 Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 On admet que la fonction φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
 qu'on notera encore φ .

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$.
 a) Montrer que $I_n - J_n = \frac{\varphi(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos(2n+1)t dt$.
 b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.
 c) Montrer que $I_n = F((2n+1)\frac{\pi}{2}) + \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$.

5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Deuxième partie:

Dans cette partie, on se propose de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

1. Montrer que $\forall t > 0, \quad 0 \leq \frac{\sin^2 t}{t} \leq \frac{|\sin t|}{t}$.
2. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $G(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$.
 - (a) Montrer que $G(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt$.
 - (b) Montrer que $\int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin 2}{2} + \int_1^x \frac{\sin 2t}{2t^2} dt$.
 - (c) Montrer que l'application $t \mapsto \frac{\sin 2t}{2t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 - (d) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente.
 - (e) En déduire que l'application $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t}$ est non intégrable sur $[1, +\infty[$.
 - (f) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est absolument convergente.
4. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

BON TRAVAIL