

Devoir de contrôle de Physique du 1^{er} Semestre
Durée : 2 H



On donne, coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z ; \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ;$$

$$\text{div} \vec{G} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z} ;$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{G} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r G_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z .$$

I- Mécanique des fluides :

1- On demande de caractériser l'écoulement définis dans le système de coordonnées polaires (r, θ)

par le champ de vitesses suivant : $\vec{v}(M) = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta$

En déduire les équations aux dérivées partielles vérifiées par cet écoulement.

2- Déterminer les équations et la formes des lignes de courant de cet écoulement.

3- Montrer qu'il existe, pour cet écoulement, une fonction potentiel des vitesses φ , solution de l'équation aux dérivées partielles de Laplace $\Delta \varphi = 0$. Déterminer l'expression et la forme des équipotentiels $\varphi = C^{te}$.

4- Effectuer un bilan de masse sur un tronçon de tube de courant de cet écoulement. En déduire la conservation du débit volumique.

II- Electromagnétisme :

Pour étudier le champ magnétique créé par un solénoïde en régime permanent, on considère une nappe cylindrique épaisse de courant volumique (voir figure 1).

On travaille dans la base cylindrique directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Ce solénoïde épais est équivalent à une densité de courant volumique $\vec{J} = J \vec{e}_\theta$ (J est uniforme et indépendant du temps) de grande dimension suivant z (le solénoïde sera supposé infini selon z), de rayon intérieur R et de rayon extérieur $R' = R + e$.

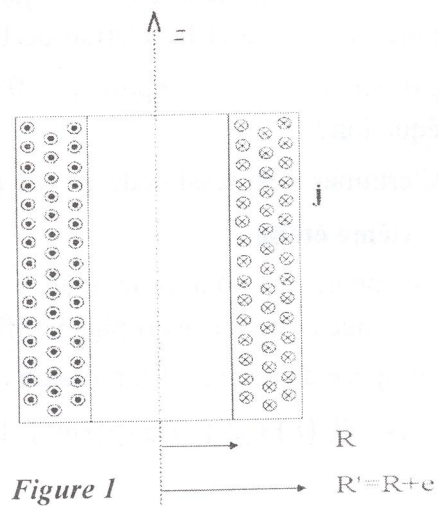


Figure 1

1. Champs dans un solénoïde illimité en régime permanent.

- 1- Quelle est l'unité de champ magnétique $\vec{B}$?
- 2- En effectuant une étude de symétrie, montrer que $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$.
- 3-a- Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère en magnétostatique.
- 3-b- En déduire l'équation différentielle vérifiée par le champ $B(M)$ dans trois régions de l'espace qu'on précisera.
- 3-c- Déterminer $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace en respectant la continuité de $\vec{B}$ dans le cas d'une répartition volumique de courant. On introduit une constante additive à déterminer par la suite.
- 4- Le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde. En déduire $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace.
- 5- On étudie le cas limite où $e \rightarrow 0$, le produit Je est constant. La distribution de courant est alors celle d'un cylindre parcouru par un courant surfacique $\vec{J}_s = J_s \vec{e}_\theta$; Montrer que $J_s = J e$.

2. Champs dans un solénoïde illimité en régime lentement variable.

L'intensité de courant dans le solénoïde est désormais sinusoïdale de pulsation ω . La densité de courant surfacique en notation complexe s'écrit : $\vec{J}_s = J_{s\max} \exp(i\omega t) \vec{e}_\theta$. Il existe alors non seulement un champ magnétique $\vec{B}$ mais aussi un champ électrique $\vec{E}$. Dans la suite, le champ sur l'axe sera toujours écrit sous la forme $\underline{B}(r=0, t) = B_0 \exp(i\omega t)$.

- 6- En faisant un raisonnement de symétrie, montrer que : $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta$.

A. Première étape

On admet en première approximation que l'on peut travailler dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques. Dans ce cas, le champ $\vec{B}(M, t)$ se calcule comme dans le cas de la magnétostatique mais le courant dépendant du temps.

On notation complexe, on a : $\underline{B}(M, t) = \underline{B}_0(r) \exp(i\omega t)$ et $\underline{E}(M, t) = \underline{E}_0(r) \exp(i\omega t)$.

- 7- Ecrire l'expression de $\underline{B}_0(r)$ pour $r < R$ et $r > R$ en fonction de B_0 . Donner B_0 en fonction de μ_0 et $J_{s\max}$.

- 8- Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère généralisée et l'équation de Maxwell-Faraday.

- 9- Retrouver en partant de ces équations, les formes intégrales correspondantes : le théorème d'Ampère généralisé et la relation de Faraday. L'une des deux équations de Maxwell citée ci-dessus n'est pas vérifiée si l'on suppose $\vec{E} = \vec{0}$ et permettra donc d'accéder à la connaissance de $\vec{E}$. Quelle est cette équation?

- 10- Déterminer l'expression de $\underline{E}_0(r)$ pour $r < R$ et $r > R$.

B. Deuxième étape

- 11-a- Si l'on adopte pour $\vec{B}$ et pour $\vec{E}$ les expressions obtenues ci-dessus, l'une des deux équations de Maxwell citée ci-dessus n'est plus vérifiée. Quelle est cette équation?

On se propose de corriger l'expression obtenue pour $\vec{B}$ en posant :

$\underline{B}(M, t) = [\underline{B}_0(r) + \underline{B}_1(r)] \exp(i\omega t)$. Le terme correctif $\underline{B}_1(r)$ est choisi nul en $r = 0$.

11-b- Montrer que le terme correctif $\underline{\underline{B}}_1(r)$ vérifie :

$$\oint_S \underline{\underline{B}}_1(r) \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \iint_S \underline{\underline{E}}_0 \cdot d\vec{S} \text{ en partant de l'équation locale de}$$

Maxwell évoquée.

12- On se limite à la région intérieure au solénoïde. Déterminer $\underline{\underline{B}}_1(r)$ pour $r < R$ en adoptant un des contours proposés à la figure 2.

13- On suppose dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.) que les champs sont donnés par la première approximation.

On admet que ceci est acceptable si le terme correctif de $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde est négligeable par rapport à l'expression obtenue pour $\vec{B}$ à l'issue de la première étape. Déterminer la condition à laquelle doit satisfaire l'A.R.Q.S.

3. Grandeurs énergétiques

14- Lorsque la condition de l'A.R.Q.S est satisfaite, donner l'expression de la densité volumique de l'énergie électromagnétique $u_{em}(r, t)$.

15- Quelle approximation faut-il effectuer dans l'expression de $u_{em}(r, t)$? En comparant l'expression de l'énergie emmagasinée par le solénoïde au cas de la densité d'énergie d'une onde électromagnétique dans le vide progressive plane, harmonique de pulsation ω , lequel, préciser si le système à dominante électrique ou magnétique ?

16- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(r, t)$ décrivant le transfert de l'énergie dans le solénoïde, toujours dans le cadre de l'A.R.Q.S.

17- Effectuer un bilan énergétique global sur la zone d'espace correspondant à l'intérieur du solénoïde. Commenter.

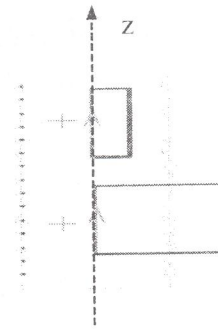


Figure 2