

Devoir de Synthèse de Physique N° 02
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- Les deux parties I et II seront rédigées sur des feuilles de composition séparées, et rendues également séparées à la fin de l'épreuve.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Tous les résultats demandés seront exprimés littéralement à l'aide des données, puis numériquement.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à attribution de points.

Partie I : Conduction Thermique

A./ Considérons un tube cylindrique d'axe Oz , de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de très grande longueur (figure 1). Le tube est réalisé par un matériau de conductivité thermique λ .

1. Dans le cas général, rappeler la loi de Fourier qui relie le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ au gradient de température. Interpréter la conductivité thermique, telle qu'elle apparaît dans la loi de Fourier, et donner son unité.
2. Le système est en régime permanent : la température $T(r)$ en un point M du tube ne dépend donc que de r , la distance de M à l'axe (en coordonnées cylindriques). Les températures de surface sont notées $T_1=T(R_1)$ et $T_2=T(R_2)$. Préciser la direction du vecteur $\vec{j}_Q$ dans le tube.

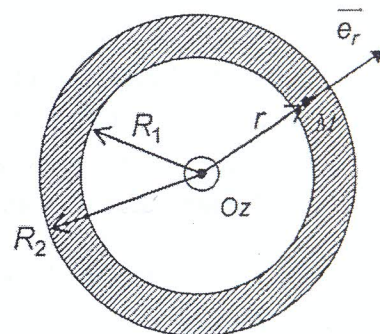


Figure 1

3. Exprimer la puissance thermique P_{th} sortant d'un cylindre de rayon r ($r_1 < r < r_2$) et de longueur L , en fonction de $\vec{j}_Q(r)$ et r .
4. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système correctement choisi, montrer que la puissance thermique P_{th} est indépendante de r .
5. En déduire l'expression de la température $T(r)$ en fonction de P_{th} , r , R_1 , λ , T_1 et L .
6. Établir que la puissance thermique peut s'écrire : $P_{th} = gL(T_1 - T_2)$ (1)
exprimer g en fonction de λ , R_1 et R_2 .
7. Calculer g pour un tube ayant les caractéristiques suivantes : $\lambda = 0,4 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $R_1 = 8 \text{ mm}$ et $R_2 = 8,5 \text{ mm}$.

B./ Le tube précédent est utilisé comme "échangeur thermique" permettant les transferts thermiques entre un fluide (appelé fluide caloporteur – ici il s'agit de l'eau) transporté dans le tube et le milieu extérieur. Le fluide caloporteur est supposé incompressible, de masse volumique ρ constante et de capacité thermique massique à pression constante c_p (phase condensée idéale) ; il s'écoule dans le tube avec un débit massique D_m .

Dans cette partie, tout phénomène de viscosité est négligé. L'écoulement est supposé uniforme et stationnaire, la vitesse d'écoulement s'écrivant en tout point sous la forme : $\vec{v} = v\vec{e}_z$ (v est une constante positive). Dans une section d'abscisse z constante, la température du fluide est uniforme et notée $T_f(z)$. Afin d'effectuer un bilan thermique permettant de déterminer $T_f(z)$, envisageons le système fermé (Σ) constitué par le fluide qui, à l'instant t , se trouve entre z_e et z_s dans le tube (figure 2).

La pression, uniforme sur une section droite du tube, est notée p_e en z_e et en z_s . La section $S = \pi R_1^2$ du tube est supposé constante. Entre les instants t et $t+dt$, le système (Σ) se translate de $(v \cdot dt)$ selon Oz (voir figure 2).

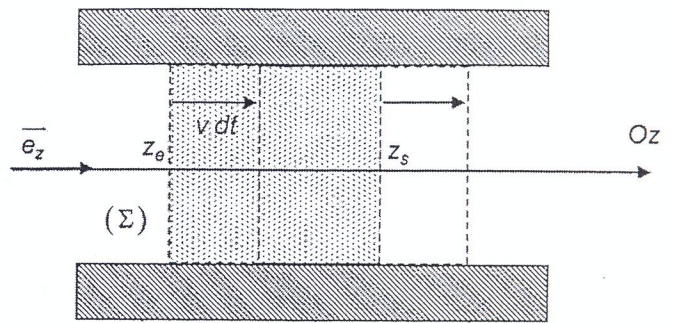


Figure 2

8. Exprimer le débit massique D_m à travers la section S du tube en fonction de ρ , S et v .

9. Déterminer la puissance P_p des forces de pression agissant sur (Σ) en fonction de D_m , p_e , p_s et ρ .

10. Montrer que la variation d'énergie interne de (Σ) entre les instants t et $t+dt$ s'écrit : $dU = D_m(u_s - u_e) \cdot dt$

où u_s (respectivement u_e) désigne l'énergie interne par unité de masse du fluide en z_s (respectivement z_e).

11. La puissance thermique totale entrant dans (Σ) est notée P_{th} . En appliquant le premier principe de la thermodynamique, établir la relation suivante :

$$P_{th} = D_m \cdot c_p [T_f(z_s) - T_f(z_e)] \quad (2)$$

C./ Le tube, parcouru par le fluide caloporteur est mis en contact, sur une longueur L (comprise entre les sections $z=0$ et $z=L$) avec un milieu extérieur de température T_m , qui demeure constante et uniforme dans tout l'espace, comme l'illustre la figure 3.

Les contacts thermiques sur les faces internes et externes du tube sont supposés parfaits : la température T_2 de la surface externe du tube est égale à T_m et, localement, la température T_1 de la surface interne est égale à $T_f(z)$. Le fluide pénètre dans le tube à la température d'admission : $T_{adm} = T_f(z=0)$.

Sauf indication contraire, toute conduction thermique au sein du fluide est négligée

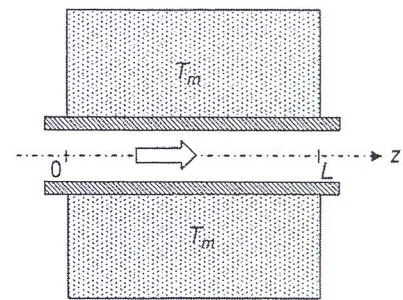


Figure 3

12. En appliquant les relations (1) et (2) précédentes à une portion élémentaire située entre z et $z+dz$, exprimer $\frac{dT_f}{dz}$ en fonction de $T_m - T_f(z)$ et de la longueur $L_1 = \frac{D_m c_p}{g}$.

13. Déterminer $T_f(z)$ en fonction de z , T_{adm} , T_m et L_1 . Tracer la courbe $T_f(z)$.

14. Exprimer la puissance thermique totale $P_{th,ech}$ fournie par le fluide caloporteur au milieu en fonction de D_m , c_p , T_{adm} , T_m , L et L_1 .

Partie II : Physique Quantique et de Laser

Problème 1 :

Dans toute cette partie, dans un souci de simplification, on se restreint à l'étude de phénomènes unidimensionnels, représentant alors la variable d'espace x et t celle de temps.

Données numériques :

- Constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$).
- Charge de l'électron $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- Masse de l'électron $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$.

Partie A : Dualité onde-corpuscule

1-a) Écrire la fonction $\underline{E}(x, t)$ décrivant l'amplitude complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée rectilignement se propageant dans le vide, suivant l'axe $\vec{e}_x$, de pulsation ω et de vecteur d'onde k .

1-b) Établir l'équation de propagation de cette onde à partir des équations de Maxwell.

Exprimer la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde k et montrer que le vide est un milieu non-dispersif.

1-c) Décrire brièvement une expérience mettant en évidence la nature quantique des phénomènes décrits par une telle onde.

Exprimer la relation entre énergie et fréquence d'un photon.

2-a) Énoncer la relation de Broglie, pour une particule matérielle de masse m , reliant la quantité de mouvement p , et la longueur d'onde λ_{DB} .

2-b) Interpréter cette relation physiquement.

2-c) Calculer λ_{DB} pour un électron accéléré par une différence de potentiel de 10V. Citer une application.

3-a) Décrire une expérience d'interférences entre ondes de matière avec un dispositif de type fentes d'Young, et un faisceau de particules incident.

3-b) Énoncer ses principaux résultats, en particulier en termes de probabilités (on décrira l'onde associée aux particules permettant d'interpréter simplement ces résultats).

3-c) Cette expérience permet-elle de préciser le lien énergie-fréquence des particules dans ce cas?

4-a) Montrer que, pour une particule, le vecteur d'onde $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$, déduire l'expression de la vitesse de phase v_φ . Conclure.

4-b) Sachant que la fonction d'onde à la particule quantique est : $\psi(x, t) = \psi_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right)$ et en utilisant la conservation de l'énergie de la particule, établir l'équation de Schrödinger :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

4-c) Quelle est la propriété importante de l'équation d'évolution de Schrödinger?

Partie B : Puits de potentiel infini.

5- Citer une des expériences qui ont conduit à l'hypothèse de quantification de l'énergie d'une particule confinée dans l'espace.

6-a) On définit un puits de potentiel $V(x)$ par :

$$\begin{cases} V(x) = \infty \text{ pour } x < 0 \text{ et } x > a \\ V(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (\text{figure 4})$$

Donner les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde $\psi(x, t)$, en $x = 0$ et $x = a$.

6-b) Résoudre l'équation de Schrödinger pour une particule piégée dans le puits et vérifier que les solutions stationnaires peuvent s'écrire :

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right), \text{ où } \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(kx)$$

et E est l'énergie de la particule confinée.

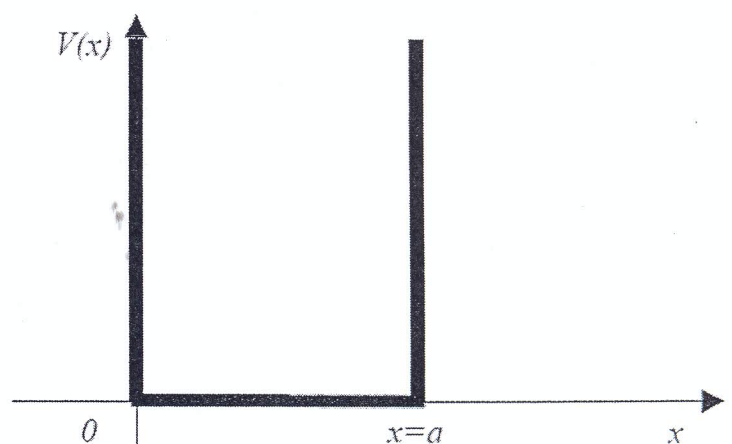


Figure 4

6-c) Donner les valeurs de k et de E compatibles avec les conditions aux limites et montrer que les valeurs de E possibles sont discrètes.

7-a) Sans faire un calcul détaillé, estimer un ordre de grandeur de l'incertitude de l'impulsion Δp_x pour une particule confinée dans le premier état énergétique.

7-b) En déduire un commentaire sur la valeur du premier niveau d'énergie trouvé, et expliquer pourquoi les niveaux d'énergie d'une particule confinée doivent être discrets.

7-c) On piège une particule de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ dans un puits de largeur $a = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Calculer l'énergie de l'état fondamental et faire un commentaire sur l'ordre de grandeur obtenu.

Partie C : Puits de potentiel asymétrique.

On considère une particule piégée, $0 < E < V_0$, dans le puits de potentiel de la figure 5

$$\begin{cases} V(x) = \infty & \text{pour } x < 0 & (\text{Région I}) \\ V(x) = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a & (\text{Région II}) \\ V(x) = V_0 & \text{pour } x > a & (\text{Région III}) \end{cases}$$

On cherche un état stationnaire de l'équation de

Schrödinger de la forme : $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$

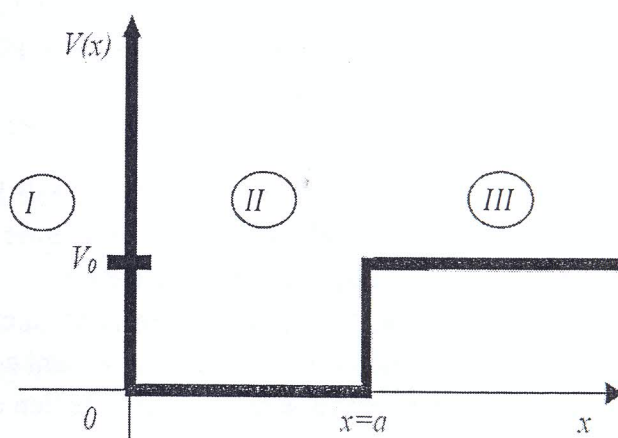


Figure 5

8-a) De point de vue classique la particule peut passer de région II vers la région III ? Justifier.

8-b) Sous l'effet de quel phénomène quantique la particule passe de la région II vers la région III.

8-c) Montrer que, dans la première région ($x < 0$), $\varphi(x) = 0$.

9-a) Donner les relations de continuités en $x = 0$ et en $x = a$.

9-b) Montrer que :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A \sin(qx) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ \varphi(x) = B \exp(-x/x_0) & \text{pour } x > a \end{cases} \quad \text{Où } E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \text{ et } x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Il n'est pas demandé de déterminer A et B .

9-c) La solution met en évidence une longueur caractéristique x_0 . Donner une interprétation physique de x_0 . Existe-t-il une longueur équivalente pour une particule matérielle classique? Donner un exemple de longueur analogue dans un autre domaine de la physique.

10-a) Utiliser les conditions aux limites pour en déduire que le vecteur d'onde q doit satisfaire à la relation :

$$\cotan(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}, \quad y = qa \text{ et } V_0 = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2ma^2}.$$

10-b) Tracer qualitativement les solutions graphiques de cette équation. On précisera en particulier la pente de la fonction g définie par $g(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$ en $y = \gamma$.

11-a) Montrer qu'aucun état lié n'existe pour des valeurs de V_0 inférieures à un potentiel seuil W que l'on déterminera.

11-b) Donner une interprétation de l'existence de ce seuil.

Problème 2 :

On désigne par Oz l'axe de révolution du faisceau laser gaussien et par $M(r, \theta, z)$ un point de l'espace repéré par ces coordonnées cylindriques d'axe Oz . La résolution des équations de propagation conduit alors à associer au faisceau sortant du laser une intensité (ou densité surfacique de puissance) $I(r, z)$ dans un plan

transverse suit la loi suivante : $I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left(\frac{-2r^2}{w^2(z)} \right)$, où $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$ avec $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$.

Pour une longueur d'onde λ , on note $\mathcal{P}$ la puissance associée à ce faisceau laser tel que : $I_0 = \frac{2\mathcal{P}}{\pi w_0^2}$.

- 1- Tracer les courbes représentants $I(r, z=0)$ et $I(r, z)$ en fonction de r pour deux valeurs fixées de z : $z=0$ et $z > z_R$. Que représente les grandeurs w_0 et $w(z)$? Préciser leur unité.
- 2- Représenter la courbe de la fonction $w(z)$ pour les valeurs de $z \geq 0$ en distinguant les zones $z < z_R$ et $z > z_R$. Préciser les cas limites où $z \ll z_R$ et $z \gg z_R$. Décrire la forme géométrique du faisceau dans chacune des zones. En déduire la nature des ondes électromagnétiques associées.

Un laser He-Ne émet à $\lambda = 0,6328 \mu m$ un faisceau gaussien caractérisé par une puissance $\mathcal{P} = 1 mW$ et un rayon de waist $w_0 = 0,75 mm$.

- 3- Définir la longueur de Rayleigh L_R . L'exprimer en fonction de z_R , puis en fonction de w_0 et λ . Faire l'application numérique et commenter.
- 4- Exprimer l'angle θ caractérisant l'ouverture du faisceau conique de centre O. Commenter l'expression de θ . Calculer sa valeur.
- 5- Comparer la divergence de ce faisceau gaussien avec l'angle d'ouverture du cône de diffraction (correspondant au premier minimum) produit par une onde plane éclairant une ouverture circulaire de diamètre $2w_0$ dont la valeur est : $\theta_c = 1,22 \frac{\lambda}{2w_0}$.

6- Focalisation d'un faisceau laser

On utilise une lentille convergente L de distance focale f_1 dans le but de focaliser le faisceau laser.

6-1- Quelle condition (inégalité) doit-on imposer sur la distance entre la source laser et la lentille pour focaliser le faisceau ? A quel résultat simple aboutit l'optique géométrique ? Quelle intensité lumineuse est alors prévue au point de la convergence ?

6-2- Montrer que dans le cadre de modélisation du faisceau décrite précédemment, il est possible de prévoir qu'on n'obtient pas un point dans le plan focal de la lentille mais une tâche (dont la section varie en fonction de z et minimale dans le plan focal). Estimer le rayon w'_0 de la tâche à l'endroit où elle est minimale.

6-3- Comment doit-on choisir la distance focale de la lentille pour assurer la condition de focalisation ? Quelle est la nouvelle valeur de la longueur de Rayleigh L'_R ?

6-4- Pour le laser He-Ne (décrit précédemment), calculer l'amplitude de l'intensité I_0 du faisceau avant d'atteindre la lentille puis celle du faisceau émergent I'_0 au point situé dans le plan focal de la lentille. Commenter.

7- On associe au système précédent une lentille convergente de focale $f_2 = 60 mm$ pour réaliser un élargissement de faisceau. Préciser la position des lentilles et caractériser le faisceau à la sortie.

Fin de l'épreuve