

Correction du Devoir de Contrôle

①

2^e Semestre (2017-2018)Problème n°01 : Diffusion de matière.

$$1./ \vec{J}_N = -D \text{ grad } n^*(r,t) = -D \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$2./ \phi(r,t) = \iint_{S. \text{ sphère } (r)} \vec{J}_N \cdot d\vec{S} \vec{n} ; \vec{n} \equiv \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \phi(r,t) = \iint -D \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} \cdot r^2 d\Omega = -D \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \quad r \geq R$$

$$3./ [D] = \frac{[J_N]}{[\frac{\partial n^*}{\partial r}]} = \frac{m^{-2} s^{-1}}{m^{-3} m^{-1}} = m^2 s^{-1} \Rightarrow D \text{ est exprimé en } m^2 s^{-1}$$

4./ En régime stationnaire, $n^*(r,t) = n^*(r) \Rightarrow$ il y a conservation du flux de particules $\Rightarrow$ le flux $\phi(r)$ est indépendant du rayon. Sur la sphère choisie.

$$5./ \phi(r) = cte = J_N(r) \cdot 4\pi r^2 = -D \frac{\partial n^*(r)}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 ; J_N(r=R,t) = N_0$$

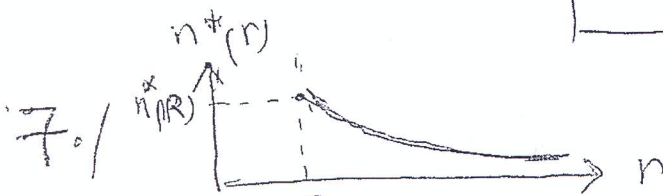
$$\phi = J(r=R,t) \cdot 4\pi R^2 = N_0 \cdot 4\pi R^2$$

$$6./ \phi(r) = cte = \phi(R) = -D \frac{\partial n^*(r)}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi R^2 N_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n^*(r)}{\partial r} = \frac{dn^*(r)}{dr} = - \frac{4\pi R^2 N_0}{D \cdot 4\pi} \frac{1}{r^2} = - \frac{R^2 N_0}{D} \frac{1}{r^2}$$

$$\text{intégration} \Rightarrow n^*(r) = \frac{R^2 N_0}{r} + cte \quad n^*(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$\Rightarrow cte = 0 \Rightarrow \boxed{n^*(r) = \frac{R^2 N_0}{D} \frac{1}{r}} ; n^*(R) = \frac{R N_0}{D}$$



8./ le volume élémentaire sphérique s'écrit:

(2)

$$d^3V = (dr) \cdot (r d\theta) (r \sin\theta d\varphi)$$

le volume élémentaire situé entre deux surfaces sphériques est obtenu en intégrant par rapport à θ et φ .

$$dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 dr$$

9./ à l'instant t , le nombre de particules dans dV est

$$dN(t) = n^*(r, t) dV$$

$$\text{à l'instant } t+dt \quad dN(t+dt) = n^*(r, t+dt) dV$$

Bilan de particules dans dV .

$$dN(t+dt) - dN(t) = d(dN(t)) = \frac{\partial n^*(r, t)}{\partial t} dt \cdot dV$$

$$= (\delta N_e - \delta N_s - \delta N_c) dV$$

$$\text{en régime permanent } n^*(r, t) = n^*(r) \Rightarrow \frac{\partial n^*(r, t)}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{0 = \delta N_e - \delta N_s - \delta N_c}_{(*)} \text{ ou } \delta N_e = \delta N_s + \delta N_c$$

$$\text{avec } \frac{\delta N_e}{dt} = \oint_{\text{sphère}(0, r)} \vec{F}_N(r, t) \cdot d\vec{s} \vec{e}_r; \quad \frac{\delta N_s}{dt} = \oint_{\text{sphère}(0, r+dr)} \vec{F}_N(r+dr, t) \cdot d\vec{s} \vec{e}_r$$

$$\text{et } \delta N_c = K \cdot dV \cdot dt$$

$$\underline{10./} (*) \Rightarrow 0 = dt \left(\oint_{(0, r)} \vec{F}_N(r, t) \cdot d\vec{s} \vec{e}_r - \oint_{(0, r+dr)} \vec{F}_N(r+dr, t) \cdot d\vec{s} \vec{e}_r - K dV dt \right)$$

$$\vec{J}_N(r,t) = J_N(r,t) \vec{e}_r$$

(3)

$$\Rightarrow 0 = \oint \vec{J}_N(r,t) \cdot d\vec{s} - J_N(r+dr) \cdot S(r+dr) dt - K dV$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} (J_N(r,t) \cdot S(r)) dr \cdot dt - K 4\pi r^2 dr \cdot dt; S(r) = 4\pi r^2$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} (J_N(r,t) \cdot 4\pi r^2) dr \cdot dt - K 4\pi r^2 dr \cdot dt$$

$$J_N(r,t) = -D \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r}$$

$$\text{enfin } 0 = +D \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} r^2 \right) - K \cdot r^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(r^2 \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} \right) \right) = \frac{K}{D} r^2 \quad (**)$$

1.1.1. flux diffusant : on a $\phi = \iint_{S(0,t)} \vec{J}_N(r,t) \cdot d\vec{s} \vec{e}_r$

$$= -4\pi D \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} r^2$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial n^*(r,t)}{\partial r} = -\frac{\phi}{4\pi D}$$

$$** \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\phi}{4\pi D} \right) = \frac{K}{D} r^2 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = -4\pi K r^2$$

$$\Rightarrow \phi(r,t) = \phi(r) = -4\pi K \frac{r^3}{3} + cte'$$

pour $r=R$ $\phi(r=R,t) = \phi(r=R) = 4\pi R^2 N_0$

$$\phi(R) = 4\pi R^2 N_0 = -4\pi K \frac{R^3}{3} + cte'$$

$$C\phi' = 4\pi R^2 N_0 + 4\pi K \frac{R^3}{3}.$$

(4)

$$\Rightarrow \phi(r) = -4\pi K \frac{r^3}{3} + 4\pi K \frac{R^3}{3} + 4\pi R^2 N_0.$$

$$\phi(r) = 4\pi R^2 N_0 + \frac{4\pi K}{3} (R^3 - r^3).$$

$$\underline{2} | \phi(r=R_0) = 0 \Rightarrow 4\pi R^2 N_0 + \frac{4\pi K}{3} (R^3 - R_0^3) = 0$$

$$\underline{r = R_0 = \left(R^3 + \frac{3R^2 N_0}{K} \right)^{1/3}.$$

le Coefficient de diffusion n'a aucun effet sur la valeur $r=R_0$ faisant annuler le flux diffusif.

Problème n° 02

(5)

1. / Une particule classique d'énergie $E > V_0$ est en mouvement rectiligne uniforme dans chacune de trois régions. Lorsqu'elle passe dans la région II, son énergie cinétique subit une diminution. Elle retrouve sa valeur initiale lorsqu'elle passe dans la région III.

2. / d'équation différentielle : vérifiée par la fonction d'onde $\psi(x)$ dans chacune des trois régions est la suivante :

$$\text{Région I} \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I(x)}{dx^2} = E \psi_I(x)$$

$$\text{Région II} \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} + V_0 \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x)$$

$$\text{Région III} \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{III}(x)}{dx^2} = E \psi_{III}(x)$$

3. / En absence de sources de particules quantiques dans la région III, on peut présenter les solutions :

$$\text{Région I} \longrightarrow \psi_I(x) = A \exp(jkx) + rA \exp(-jkx)$$

$$\text{Région II} \longrightarrow \psi_{II}(x) = \alpha \exp(jKx) + \beta \exp(-jKx)$$

$$\text{Région III} \longrightarrow \psi_{III}(x) = tA \exp(jkx)$$

La fonction d'onde $\psi(x)$ doit subir la continuité en $x = \pm \frac{a}{2}$

ainsi que la dérivée première

(6)

$$\psi_I(-\frac{a}{2}) = \psi_{II}(-\frac{a}{2}) \text{ et } \psi_{II}(\frac{a}{2}) = \psi_{III}(\frac{a}{2})$$

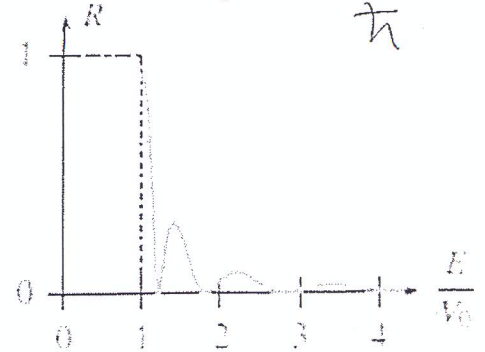
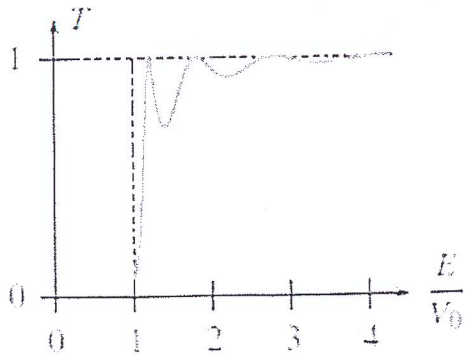
$$\frac{d\psi_I}{dx}(-\frac{a}{2}) = \frac{d\psi_{II}}{dx}(-\frac{a}{2}) \text{ et } \frac{d\psi_{II}}{dx}(\frac{a}{2}) = \frac{d\psi_{III}}{dx}(\frac{a}{2})$$

4.01 / On utilise la relation $R + T = 1$. Elle traduit qu'une particule quantique est soit réfléchie, soit transmise à travers la barrière, sans autre possibilité.

On en déduit $R = 1 - T$

$$\Rightarrow R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\right)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\right)}$$

4.02 / Représentation de R et T en fonction de la variable $x = \frac{E}{V_0}$ avec un choix de la valeur de $\frac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar} = 7$



On constate, que contrairement à ce prévoit le cas de la mécanique classique, la probabilité de transmission de la particule n'est pas obligatoirement totale ($T=1$): il existe donc une probabilité de réflexion et non nulle. c'est un fait purement quantique. On constate qu'il

exister les valeurs particulières d'énergie E pour laquelle $T=1$ et $R=0$. (7)

Si $E \gg V_0$, il n'y a plus distinction entre les comportements classique et quantique $\Rightarrow R=0$ et $T=1$

5.1. Pour $E \neq V_0$ ($E > V_0$), la transmission est totale lorsque $T=1$: ($R=0$) $\Rightarrow \sin^2\left(\frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\right) = 0$
 $\Rightarrow \frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = n\pi ; n \in \mathbb{N}$

la longueur d'onde de Lewis de Broglie associée au faisceau d'électrons dans la barrière est $\lambda_{DB} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(E-V_0)}}$

$$\lambda_{DB} = 2\pi \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V_0)}} = 2\pi \frac{a}{n\pi} = \frac{2a}{n} \Rightarrow \boxed{a = \frac{n}{2} \lambda_{DB}}$$

A-N: $\lambda_{DB} = \frac{2\pi \hbar}{\sqrt{2m(E-V_0)}} = 5,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $\left\{ \begin{array}{l} E = 10 \text{ eV}; V_0 = 4 \text{ eV} \\ \hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s et} \\ m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg.} \end{array} \right.$

$$\boxed{a = \frac{n}{2} \times 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$$