

Correction de la deuxième partie : Devoir de Synthèse

Problème N°1

1) $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$

* Le fluide est en écoulement stationnaire dnc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

* $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(v(x) \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \right) \cdot v(x) \vec{e}_z$
 $= \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) v(x) \cdot \vec{e}_z = \vec{0}$

Donc $[\vec{a} = \vec{0}]$

2) D'après l'équation de Navier Stokes on a $\nabla \cdot \vec{p} = \mu \Delta \vec{v}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (\text{Projection selon } \vec{e}_x) \\ \frac{dp}{dy} = 0 \quad (\text{Projection selon } \vec{e}_y) \end{array} \right\} \text{ car } \Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \vec{e}_z$

Projection de $(\vec{e}_z)$: $\left[\frac{dp}{dz} = \mu \frac{d^2 v}{dx^2} \right]$

d'où $\kappa = -\mu \frac{d^2 v}{dx^2}$

3)

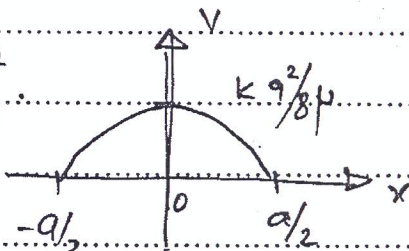
$\vec{v}(P \in \text{fluide réel}) = \vec{v}(P \in \text{obstacle})$

dnc $\left\{ \begin{array}{l} v(x = a/2) = 0 \\ v(x = -a/2) = 0 \end{array} \right.$

$$41 \quad \mu \frac{d^2 v}{dx^2} = -k \Rightarrow v(x) = -\frac{kx^2}{2\mu} + Ax + B$$

$$v(x = \pm a/2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{ka^2}{8\mu} \end{cases}$$

$$v(x) = -\frac{k}{2\mu} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right)$$



$$\vec{v}(x) = \frac{k}{2\mu} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \vec{e}_3$$

$$> 0 \quad \forall x \in [-a/2, a/2]$$

donc $k > 0$ pour avoir un écoulement psm ($\vec{e}_3$)

51

$$q_m = \rho \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \iint v(x) \vec{e}_3 \cdot dx dy \vec{e}_3 \quad \left(q_m = \rho \cdot \overset{\text{Débit volumique}}{D_v} \right)$$

$$q_m = \rho \int_{-a/2}^{a/2} v(x) dx \int_0^H dy$$

$$q_m = \frac{H \rho k a^3}{12\mu} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{H \rho}{12\mu}$$

$$61 \quad \frac{dp}{dz} = -k \Rightarrow p(z) = -kz + C_1$$

$$\begin{cases} p(z=0) = p_1 \Rightarrow p_1 = C_1 \\ \text{d'où } p(z) = -kz + p_1 \end{cases}$$

$$p(z=L) = p_2 = -kL + p_1 \quad \text{d'où } k = \frac{p_1 - p_2}{L}$$

$$71 \quad q_m = \alpha k a^3 = \alpha \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) a^3$$

$$G_h = \frac{\alpha a^3}{L} = \frac{H \rho}{12\mu L} a^3$$

8) Conductance (G) = $\frac{1}{\text{Résistance (R)}}$ ($G = 1/R$)

D'après la loi d'ohm $U = RI$ et $I = GU$

$I = G \Delta V$

$I \leftrightarrow q_m$

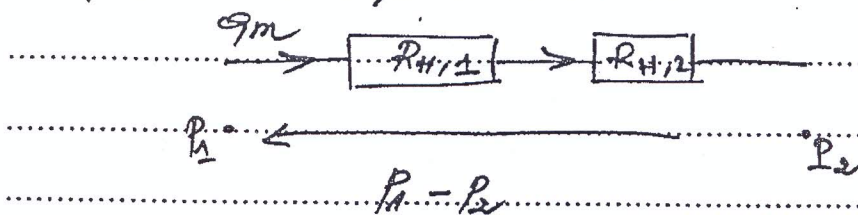
$q_m = G_R (P_1 - P_2)$

$\Delta V = U \leftrightarrow P_1 - P_2 = \Delta p$

" q_m " est un courant de masse provoqué par une différence de pression entre deux extrémités

9)

Écoulement stationnaire $\rightarrow q_m = \text{est le long de la conduite}$
cette situation est analogue à un courant qui traverse
des résistances en série



* $R_{H,1} = \frac{1}{G_{H,1}}$; $G_{H,1}$: La conductance d'une conduite
de section de diamètre a et de longueur $(L - L_c)$

* $R_{H,2} = \frac{1}{G_{H,2}}$; $G_{H,2}$: La conductance d'une conduite de diamètre
 $(a - x_c)$ et de longueur L_r

$G_{H,1} = \frac{\alpha a^3}{(L - L_c)}$ (d'après Q. 7)

$G_{H,2} = \frac{\alpha (a - x_c)^3}{L_r}$

$R_{eq} = R_1 + R_2 \Rightarrow \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$

$$G_{eq} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} = \alpha \frac{a^3 (a - x_c)^3}{(L - L_c)(a - x_c)^3 + a^3 L_c}$$

$$q_m = G_{eq} (p_1 - p_2) = G_{eq} [p(0) - p(L)]$$

$$q_m = \frac{\alpha (p_1 - p_2)}{\frac{(L - L_c)}{a^3} + \frac{L_c}{(a - x_c)^3}}$$

10) On a $x_c = x_0 + \varepsilon$

d'où $a - x_c = (a - x_0) - \varepsilon = (a - x_0) \left(1 - \frac{\varepsilon}{a - x_0}\right)$

$$\frac{L_c}{(a - x_c)^3} = \frac{L_c}{(a - x_0)^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{a - x_0}\right)^3} \approx \frac{L_c}{(a - x_0)^3} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{a - x_0}\right)$$

$$q_m = \frac{\alpha (p_1 - p_2)}{\left(\frac{L - L_c}{a^3}\right) + \frac{L_c}{(a - x_0)^3} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{a - x_0}\right)} = \frac{\alpha (p_1 - p_2)}{\frac{L - L_c}{a^3} + \frac{L_c}{(a - x_0)^3} (1 + f(\varepsilon))}$$

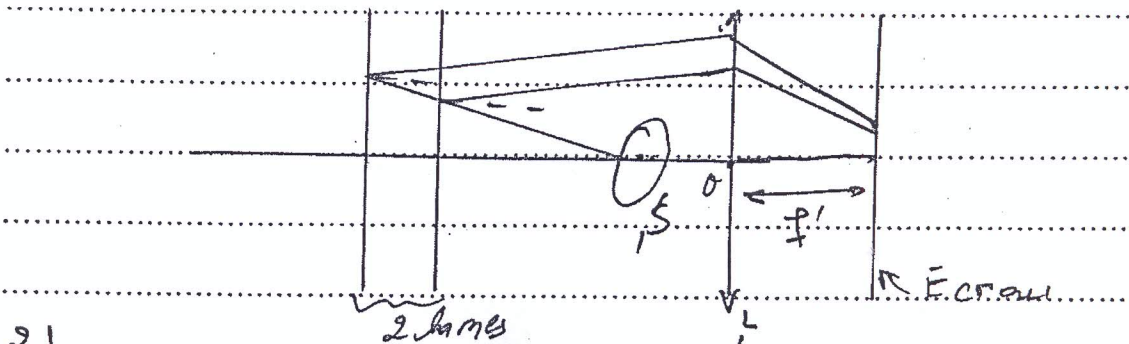
tel que $f(\varepsilon) = \frac{3L_c}{(a - x_0)^4} \varepsilon \frac{1}{\frac{L - L_c}{a^3} + \frac{L_c}{(a - x_0)^3}}$

$$q_m = q_{m0} \frac{1}{1 + f(\varepsilon)} \approx q_{m0} (1 - f(\varepsilon))$$

donc $f(\varepsilon) = b\varepsilon$ d'où $b = \frac{3L_c}{(a - x_0)^4} \frac{1}{\frac{L - L_c}{a^3} + \frac{L_c}{(a - x_0)^3}}$

Problème n°2

1. Les franges sont localisées à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille convergente

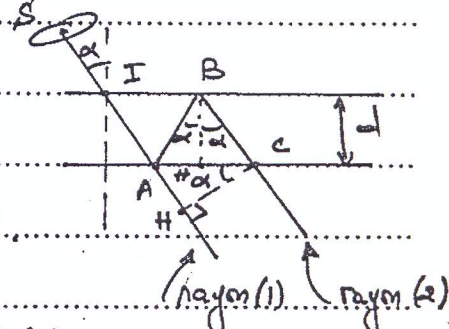


2.1

$$\delta = (SIABCM_{\infty}) - (SIAM_{\infty})$$

$$\delta = (ABCM_{\infty}) - (AM_{\infty})$$

$$\delta = (AB) + (BC) + (CM_{\infty}) - (AM_{\infty})$$



* D'après le théorème de Malus $\varphi(H) = \varphi(C) \Rightarrow (HM_{\infty}) = (CM_{\infty})$

$$\delta = (AB) + (BC) - (AH)$$

$(AB) = (BC)$ (c'est l'air entre les lames)

$$\text{Dans le triangle } ABH: \cos \alpha = \frac{d}{AB} \Rightarrow AB = \frac{d}{\cos \alpha}$$

$$\text{Dans le triangle } ACH: \sin \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \sin \alpha$$

$$\text{Dans le triangle } ABC: \tan \alpha = \frac{AC/2}{d} \Rightarrow AC = 2d \tan \alpha$$

$$\text{d'où } AH = 2d \tan \alpha \sin \alpha$$

$$AH = 2d \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\delta = \frac{2d}{\cos \alpha} - \frac{2d \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2d \cos \alpha$$

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \alpha$$

3) La deuxième onde transmise a subi un déphasage $\Psi(M)$ et 2 réflexions de plus d'où l'amplitude du deuxième rayon émergent s'écrit : $a_2 = r^2 a_1 e^{-i\Psi}$

par itération le n-ième rayon transmis a subi r^{2n} réflexion et un déphasage de $n\Psi$

$$a_n = R^{n-1} a_1 e^{i(n-1)\Psi}$$

4)

$$A(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (R e^{-i\Psi})^n$$

$$A(M) = \frac{a_1}{1 - R e^{-i\Psi}}$$

$$I = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constante}}}{k} A(M) \cdot A^*(M)$$

$$I = \frac{k a_1^2}{(1 - R e^{-i\Psi})(1 - R e^{i\Psi})} = \frac{k a_1^2}{1 - R e^{i\Psi} - R e^{-i\Psi} + R^2}$$

$$I = \frac{k a_1^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Psi} = \frac{k a_1^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Psi/2)}$$

$$1 + R^2 - 2R \cos \Psi = \frac{1 + R^2 - 2R}{(1-R)^2} + \frac{2R - 2R \cos \Psi}{2 \sin^2(\Psi/2)}$$

$$I = \frac{k a_1^2 / (1-R)^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\Psi/2)} ; \text{ si } \Psi = 0 \quad I = I_0 = \frac{k a_1^2}{(1-R)^2}$$

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\psi/2)}$$

5| On observe des anneaux

6| On a interférences constructives si $\psi = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$)

On a $T = 1 - R$ avec $T \ll 1$

$$\frac{4R}{(1-R)^2} = \frac{4(1-T)}{(1-R)^2} \approx \frac{4}{T^2}$$

$$I(x=0, d) = \frac{I_0}{1 + \frac{4}{T^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0}\right)}$$

8|

9| Le calcul de la largeur à mi-hauteur a déjà été vu en électrocinétique. En effet, il a été fait pour déterminer la valeur de la bande passante $\Delta\omega$ d'un filtre passe-bande.

$$10| d_0 = p \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{où } p = \frac{2d_0}{\lambda_0} = 47.604$$

$$11| \text{ On a } I = \frac{I_0}{2} \text{ pour } d = d_+ \text{ (ou } d = d_-)$$

$$\frac{I_0}{1 + \frac{4}{T^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0}\right)} = \frac{I_0}{2}$$

$$\frac{4}{T^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0}\right) = 1$$

$$\sin^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0}\right) = \frac{T^2}{4} \quad \text{or } T \ll 1 \text{ où } \sin x \approx x$$

$$\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$d^2 = \left(\frac{\lambda_0 T}{4\pi}\right)^2$$

$$d = \pm \frac{\lambda_0 T}{4\pi}$$

$$\Delta d = d_+ - d_- = \frac{\lambda_0 T}{2\pi}$$

121

On note d la distance qui correspond au pic de l'interfer.

l'ordre $(\lambda_0 + \Delta\lambda)$

$$d = p \frac{(\lambda_0 + \Delta\lambda)}{2} \quad \text{et} \quad d_0 = p \frac{\lambda_0}{2}$$

$$d - d_0 = p \frac{\Delta\lambda}{2}$$

Les 2 pics sont détectables si $(d - d_0)$ est plus grande que Δd .
 À la limite de résolution on a $\Delta d = d - d_0$.

$$\frac{\lambda_0 T}{4\pi} = p \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0 T}{p T C}$$