

Partie II : Devoir de Synthèse

Problème N° 01 : Ecoulement d'un fluide réel entre deux plans fixes

L'espace étant rapporté au trièdre cartésien $Oxyz$ de base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On étudie l'écoulement d'un fluide incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité μ , dans une région limitée. L'effet de pesanteur est négligé. Il est rappelé qu'alors, le champ de vitesses $\vec{v}(M, t)$ et le champ de pression $p(M, t)$ dans un fluide incompressible sont reliés par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t} + (\vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}(M, t) \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t) + \mu \Delta \vec{v}(M, t)$$

Le fluide est en écoulement stationnaire et unidirectionnel. Il est effectué dans une géométrie plane limitée par deux plans situés à $x = \frac{a}{2}$ et $x = -\frac{a}{2}$ (figure 3). Le champ de vitesses est alors de la forme : $\vec{v}(M, t) = v(x) \vec{e}_z$.

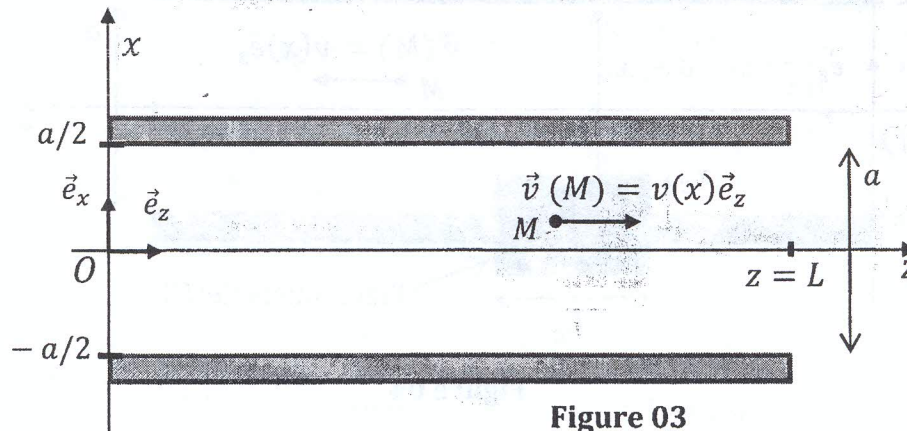


Figure 03

1- Quelle est l'accélération d'une particule de fluide associée à cet écoulement ? Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}} p(M)$ en fonction μ et $\frac{d^2 v(x)}{dx^2}$.

2- En déduire que la pression $p(M)$ ne dépend que de la variable z et montrer que la quantité $\frac{dp(z)}{dz} = -K$ est constante.

3- Rappeler les conditions aux limites vérifiées par la vitesse $v(x)$ en $x = \pm \frac{a}{2}$.

4- Déterminer $v(x)$ en fonction de x , K et μ . Représenter le graphique du profil de la vitesse entre les deux plans.

La grandeur K doit être positive pour que l'écoulement soit effectué suivant les z croissants. Justifier ce choix.

5- Montrer que le débit massique total q_m caractérisant l'écoulement, à travers une section transversale de largeur H suivant Oy , s'écrit : $q_m = \alpha K a^3$. Expliciter α en fonction de μ , ρ et H .

L'écoulement précédent est étudié entre les positions repérées par abscisses $z=0$ et $z=L$ décrites par les pressions $p(z=0) = p_1$ et $p(z=L) = p_2$ respectivement (figure 03).

6- Exprimer la quantité K en fonction de L , p_1 et p_2 .

7- Montrer que le débit massique à travers une section de largeur H selon Oy vérifie la relation : $q_m = G_h(p_1 - p_2)$, où G_h est un terme à exprimer en fonction de a , L , H , ρ et μ .

8- En faisant une analogie avec les grandeurs électriques, justifier le nom de « conductance hydraulique » pour G_h . Préciser en particulier l'équivalent électrique de q_m et celui de la chute de pression $p_1 - p_2$.

Le système, toujours invariant suivant Oy , présente maintenant un rétrécissement ajustable de longueur L_c . Ce rétrécissement est obtenu à l'aide d'une pièce plane (C) dite pièce d'obstruction couissant de façon étanche suivant Ox dans une ouverture créée dans le plan inférieur. La position de cette pièce est repérée par le débordement x_c par rapport à la position $x = -\frac{a}{2}$ (figure 4). Au-dessus de la pièce (C), la largeur de la conduite est : $a - x_c$.

On admet que, pour toutes les portions de la conduite (rétrécie ou non) se comporte comme le système étudié précédemment.

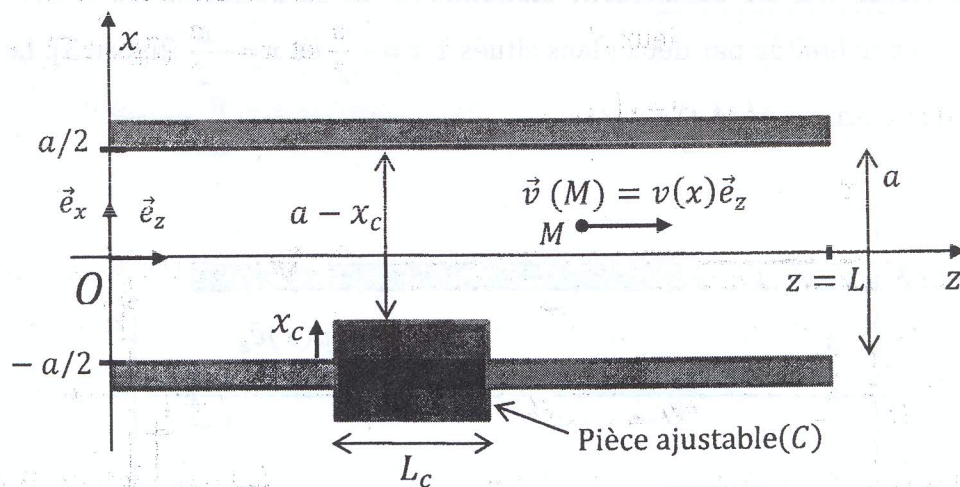


Figure 04

9- En considérant le système comme une association de conductances hydrauliques, exprimer le débit massique à travers une section de largeur H suivant Oy en fonction de $p_1 - p_2$, α , L , L_c , a et x_c .

La différence de pression $p_1 - p_2$ étant fixée, le débit massique est ajusté en modifiant la valeur de x_c autour d'une valeur moyenne x_0 . Le déplacement de la pièce (C) est de faible amplitude de façon qu'il est possible de poser $x_c = x_0 + \varepsilon$, avec $x_0 \gg \varepsilon$.

10- En faisant un développement limité au premier ordre en ε , montrer que le débit massique peut s'écrire : $q_m = q_{m0}(1 - b\varepsilon)$, avec $q_{m0} = \frac{\alpha(p_1 - p_2)}{\frac{L - L_c}{a^3} + \frac{L_c}{(a - x_0)^3}}$ et b est une constante positive à

exprimer en fonction de L , L_c , a et x_0 .

Problème N° 02 : Interférences à ondes multiples

Le dispositif interférométrique à ondes multiples (Pérot-Fabry) est constitué de deux lames de verre identiques, distantes de d et séparées par de l'air d'indice égal à 1. Les faces internes des lames sont traitées pour augmenter le facteur de réflexion en amplitude r ($r \rightarrow 1$). Ces réflexions n'introduisent aucun déphasage. Le coefficient de transmission en amplitude est noté t .

On éclaire ce système par un faisceau de lumière parallèle (onde plane) de longueur d'onde λ_0 , sous un angle d'incidence α faible (figure 5). La vibration lumineuse associée au rayon incident est d'amplitude A_0 . On note A_1 l'amplitude de la vibration lumineuse de l'onde émergente relative au premier rayon transmis du dispositif.

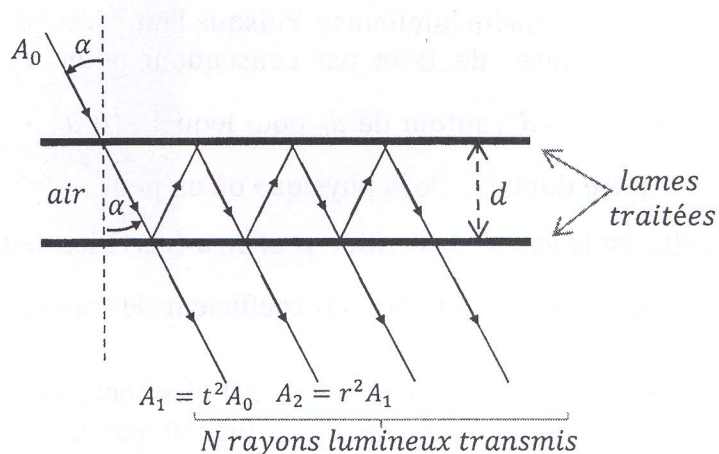


Figure 05

1- L'interféromètre étant éclairé par une source large, discuter la localisation des franges d'interférences. Réaliser un schéma du montage expérimental permettant d'observer le phénomène d'interférences.

2- Montrer que la différence de marche entre deux rayons transmis successifs s'écrit sous la forme : $\delta(M) = 2d \cos \alpha$. Déduire le déphasage correspondant $\varphi(M)$.

3- On appelle $r = \frac{A_{\text{réfléchi}}}{A_{\text{incidente}}}$ le coefficient de réflexion en amplitude des vibrations de l'onde

lumineuse quand elle se réfléchit sur les faces intérieures des lames. On note $R = r^2$ le coefficient de réflexion en énergie lumineuse dont la valeur est légèrement inférieure à 1. Ecrire l'amplitude complexe $A_n(M)$ de la vibration associée au $n^{\text{ième}}$ rayon lumineux transmis en fonction de l'amplitude $A_1(M)$ de la vibration du premier rayon transmis du dispositif, de R et de $\varphi(M)$.

4- Déterminer l'amplitude complexe totale $A(M)$ associée à tous les rayons lumineux transmis suivant la direction α . Il s'agit d'un phénomène d'interférence interférences à N ondes transmises ($N \rightarrow +\infty$).

On rappelle que la somme des termes d'une progression géométrique se calcule à partir de la

relation :
$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

Montrer que l'intensité lumineuse au point M de l'écran d'observation s'écrit sous la forme :

$$I(M) = I(\alpha, d) = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d \cos \alpha}{\lambda_0}\right)}$$

5- Quelle est la forme des franges constituant la figure d'interférences observée dans le plan focal image d'une lentille convergente placée parallèlement aux lames traitées ?

6- Quelles sont les valeurs du déphasage φ qui correspondent à des interférences constructives (intensité lumineuse maximale) ?

7- Pour la suite du problème, on observe les rayons émergents dans la direction $\alpha = 0$. Que devient la fonction $I(\alpha = 0, d)$ dans le cas où R est très proche de l'unité, c'est-à-dire $T = 1 - R$ très petit devant 1 ?

8- On suppose que $d = d_0 = p \frac{\lambda_0}{2}$ avec p entier. On cherche à évaluer la largeur des pics décrivant le maximum d'intensité lumineuse. Puisque l'intensité peut prendre des valeurs notables pour des valeurs particulières de φ et par conséquent pour l'épaisseur d , on impose sa largeur à mi-hauteur $\Delta d = d_+ - d_-$, autour de d_0 pour lequel $I(0, d) > \frac{I_0}{2}$.

9- Citer d'autre domaine de la physique où on peut adopter ce type de critère.

10- Quelle est la valeur de l'entier p si on a écarté les deux lames d'une distance $d_0 = 1,2615 \text{ cm}$?

11- Déterminer Δd en fonction du coefficient de transmission en énergie T et la longueur d'onde λ_0 .

12- On considère qu'on peut distinguer 2 pics correspondant à deux longueurs d'onde voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$, si le déplacement de d , qui fait passer d'un pic à l'autre au même ordre p , est supérieur à $\frac{\Delta\lambda}{2}$. En déduire quel est le plus petit écart de longueur d'onde détectable $\Delta\lambda$ en fonction de T , p et λ_0 .

Bonne Chance