

Devoir de Contrôle N°1

Durée: 1H30

Epreuve: Analyse

Date: 30-10-2018

PROBLÈME

Dans ce problème $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes.

Partie I

1. Soit Φ l'application donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t) \exp(-t^2) dt\end{aligned}$$

- (a) Montrer que l'application Φ est bien définie.
(b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite, on considère $\| \cdot \|$ la norme issue du produit scalaire Φ sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2} \exp(-t^2) dt = \frac{2n+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} \exp(-t^2) dt = 0.$$

3. Soit $a_n = \|X^n\|^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $a_n = \frac{(2n)!}{4^n n!} a_0$.

4. Soit l'application $\Psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\Psi(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} tP(t) \exp(-t^2) dt$$

- (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$|\Psi(P)| \leq \sqrt{\frac{a_0}{2}} \|P\|.$$

- (b) En déduire que Ψ est continue sur $\mathbb{R}[X]$.

5. Montrer que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \int_{-\infty}^{+\infty} tP(t) \exp(-t^2) dt = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}[X]$.

Partie II

Le but de cette partie est de calculer la valeur de a_0 .

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1+t) \leq \exp(t)$.
 (b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1-t^2) \leq \exp(-t^2) \leq \frac{1}{1+t^2}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq \int_0^{+\infty} \exp(-nt^2) dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n+1} dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n-2} dt$$

- (c) En utilisant le fait que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- (d) Déterminer les valeurs des intégrales suivantes :

$$a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} dt, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp(-t)}{t\sqrt{t}} dt.$$

BON TRAVAIL