

Devoir de contrôle de Physique N° 01
(Durée : 2 H)

PROBLEME N° 01

Conventionnellement, l'atmosphère d'une planète est divisée en plusieurs couches. On s'intéresse à un modèle simplifié de la couche la plus basse appelée troposphère, d'épaisseur environ 15 km dans les zones tempérées. Le gaz contenu dans la troposphère est assimilé à un gaz parfait et on suppose que la température de la troposphère est uniforme et égale à T_0 .

On note n la quantité de matière de gaz contenue dans la troposphère, V le volume de gaz contenu dans la troposphère et M la masse molaire de ce même gaz. Pour repérer l'altitude, on place un axe Oz vertical dirigé vers le haut dont l'origine est située à la surface du sol. On définit la pression $P(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ du gaz de la troposphère à l'altitude z . On suppose enfin que l'intensité de la pesanteur g ne varie pas avec l'altitude dans la troposphère.

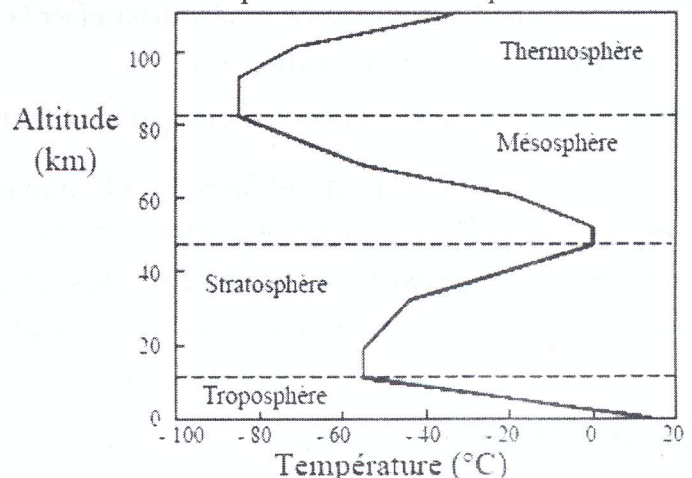
1- Rappeler la loi des gaz parfaits et les unités des grandeurs qui y figurent. En déduire une expression de la masse volumique $\rho(z)$ du gaz de la troposphère en fonction de la pression $P(z)$ du gaz, de la constante des gaz parfaits R , de la température T_0 et de la masse molaire M .

2- On suppose que chaque couche de la troposphère est en équilibre statique dans le référentiel galiléen du sol, rappeler l'équation fondamentale de la statique des fluides. Trouver une relation entre la pression $P(z)$ et l'altitude z .

3- Montrer que la pression $P(z)$ peut se mettre sous la forme $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, où P_0 est la pression à l'altitude $z=0$ et H est un paramètre que l'on exprimera en fonction de M , g , R et T_0 . Quelle est l'unité de H ?

4- D'après la figure ci-contre, le modèle simplifié de la troposphère adopté aux questions précédentes vous paraît-il justifié ? Quelle est la loi de variation de température doit-on adopter dans cette couche ? Quelle est alors l'expression de la variation de la pression en fonction de l'altitude z en tenant compte de cette nouvelle répartition de la température ?

Profil de la température de l'atmosphère terrestre



PROBLEME N° 02

On rappelle que :

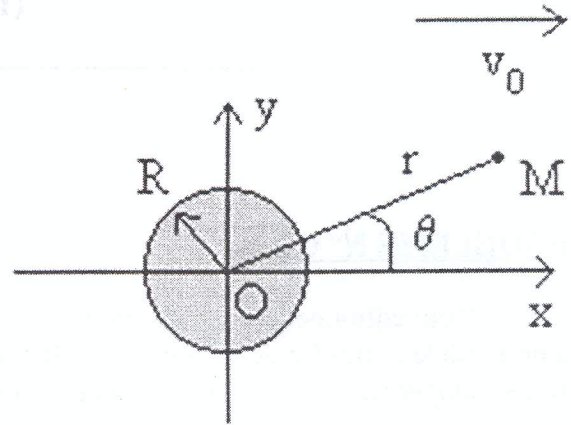
$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} ; \overline{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

On considère un fluide incompressible (air à des faibles vitesses d'écoulement) de masse volumique ρ entourant un obstacle cylindrique de rayon R et d'axe Oz et de longueur L .

L'écoulement est à deux dimensions (vitesses parallèles au plan xOy et indépendantes de z) et stationnaire. Un point M du plan xOy est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

L'obstacle, dans son voisinage, déforme les lignes de courant ; loin de l'obstacle, le fluide est animé d'une vitesse uniforme $\vec{v}_\infty = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et le champ de pression du fluide est uniforme égale à $P_\infty = P_0$.

L'écoulement est supposé irrotationnel.



I- Dans cette partie, le fluide est supposé en écoulement parfait.

1- Dédire que $\vec{v}_1(M) = \overline{\text{grad}} \varphi_1(M)$ et que $\Delta\varphi_1(M) = 0$.

2- En utilisant la méthode de séparation des variables, on montre que : $\varphi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$ qui représente la solution de l'équation de Laplace. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$.

En posant $f(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^n$, montrer que la solution de cette équation est de la forme :

$$\varphi(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \theta.$$

3- Déterminer l'expression du champ de vitesses $\vec{v}_1(r, \theta)$ décrivant l'écoulement autour du cylindre.

4- Ecrire les conditions aux limites que satisfait le champ de vitesses $\vec{v}_1(r, \theta)$ au voisinage de l'obstacle ($r = R$) et à l'infini ($r \rightarrow \infty$).

5- Calculer les constantes d'intégration A et B puis exprimer les composantes du champ de vitesses $v_r(r, \theta)$ et $v_\theta(r, \theta)$.

6- En utilisant l'équation de Bernoulli, déterminer la pression $P(R, \theta)$. Dédire la résultante des forces de pression qui s'exerce sur le cylindre.

II- Le fluide incompressible n'est plus parfait et on note η sa viscosité dynamique.

On étudie le cas où le fluide est au repos à l'infini mais le cylindre est en mouvement de rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω_0 . A cause des forces de viscosité, le fluide est mis en rotation. En tout point M , le champ de vitesses caractérisant l'écoulement s'écrit : $\vec{v}_2(M) = v_\theta(M) \vec{e}_\theta$. Il est égal à celui du cylindre pour $r = R$ et diminue en s'éloignant.

L'écoulement est supposé toujours irrotationnel.

1- Montrer que le champ de vitesses reste régi par des équations de type $\vec{v}_2(M) = \overline{\text{grad}} \varphi_2(M)$ et

$$\Delta \varphi_2(M) = 0.$$

2- Vérifier que le potentiel de vitesses $\varphi_2(M) = C\theta$, C est une constante, est une solution de l'équation de Laplace.

3- Déterminer l'expression du champ de vitesses $\vec{v}_2(M)$ associée à cet écoulement. En déduire la constante C en fonction de ω_0 et R à partir des conditions aux limites.

4- Montrer que, pour un fluide visqueux en écoulement irrotationnel, l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \vec{a} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v} \text{ se ramène à celle d'Euler décrivant un fluide parfait.}$$

$$\text{On pourra utiliser la relation : } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}.$$

On se place dans le cas où les deux situations sont superposées : le cylindre tourne à vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z$ dans un écoulement d'air (vent) à la vitesse $\vec{v}_\infty = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ loin du cylindre. On suppose que l'écoulement résultant est irrotationnel.

5-1- Montrer que le potentiel de vitesses résultant $\varphi(M) = \varphi_1(M) + \varphi_2(M)$ est solution de $\vec{v}(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$ et de $\Delta \varphi(M) = 0$.

5-2- Calculer les composantes du champ de vitesses $v_r(M)$ et $v_\theta(M)$ décrivant cet écoulement.

5-3- Comparer vitesse de l'écoulement du fluide pour $r = R$ et vitesse de rotation du cylindre. En déduire que la solution trouvée pour le champ de vitesses n'est pas totalement satisfaisante pour étudier l'effet Magnus.

6- Calculer la pression exercée sur le cylindre $P(R, \theta)$. Déduire la résultante des forces de pression appelée **portance** qui s'exerce sur l'obstacle.

Ecrire ce dernier résultat en introduisant la masse volumique du fluide, le volume du cylindre, son vecteur rotation et la vitesse à l'infini du fluide.

Le résultat vous paraît-il en accord avec vos observations courantes sur le mouvement des ballons ?

QUESTIONS DU COURS

On considère un système défini par le contenu d'une surface (Σ) fixe dans un référentiel supposé galiléen. Un tel dispositif peut représenter une turbine, une tuyère, un compresseur,.... Il est le siège d'un écoulement d'un fluide non visqueux en régime stationnaire. Entre les instants t et $t + dt$, on note δm_e et δm_s les masses élémentaires échangées respectivement par l'entrée et la sortie le système. Lors de cette évolution, le fluide dans (Σ) échange avec le milieu extérieur un travail utile massique w_u (dû à l'action des efforts mécaniques) et un transfert thermique massique q .

1- Définir le système fermé (Σ^*) aux instants t et $t + dt$.

2- Énoncer sans démonstration :

- * le théorème de la quantité de mouvement.
- * le premier principe de la thermodynamique.