

Devoir de Synthèse de Physique N° 01
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Mécanique des Fluides (08 points)

Dans un fluide en écoulement parfait, homogène et incompressible de masse volumique ρ (air ou eau), est immergée une hélice. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$, supposé galiléen, où l'hélice est animée d'un mouvement de rotation autour de son axe $x'x$, fixe, à vitesse angulaire constante (figure 1). On fera les hypothèses suivantes :

- L'écoulement du fluide autour de l'hélice est supposé stationnaire, dans $\mathcal{R}$, et à symétrie de révolution autour de l'axe $x'x$.
- La figure 1 représente un tube de courant dans $\mathcal{R}$, dans l'hypothèse où $S_A > S_B$. Loin de l'hélice et en amont de la section S_A , la vitesse du fluide est uniforme et vaut $\vec{v}_A = v_A \vec{e}_x$ dans $\mathcal{R}$. Au niveau de la section S_B , elle vaut $\vec{v}_B = v_B \vec{e}_x$, toujours à grande distance de l'hélice.
- La pression, à grande distance de l'hélice, et dans toutes les directions, est uniforme et vaut P_0 , en particulier sur les sections S_A et S_B .
- Les sections Σ_1 et Σ_2 du tube de courant, très voisines de l'hélice, ont leurs aires pratiquement égales, de valeur S . Les pressions du fluide au niveau de ces sections sont supposées uniformes et de valeurs respectives P_1 et P_2 .
- La vitesse du fluide, dans $\mathcal{R}$, au voisinage de l'hélice, est supposée uniforme, de valeur $\vec{v} = v \vec{e}_x$.
- Les effets de la pesanteur sur le fluide sont négligeables.

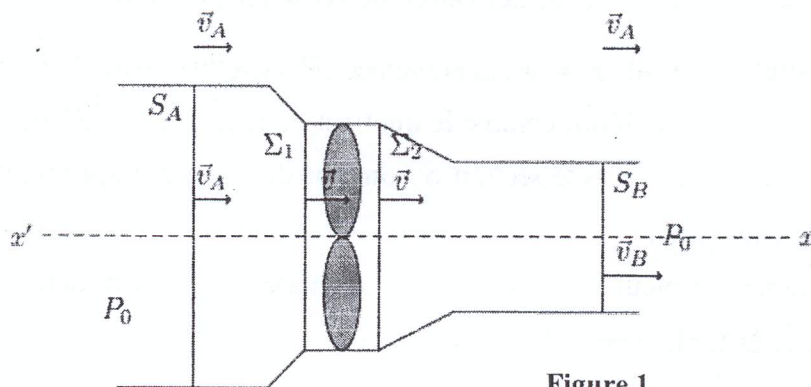


Figure 1

- 1- Ecrire deux relations entre les grandeurs S_A , v_A , S_B , v_B , S et v .
- 2- Déterminer les expressions des pressions P_1 en fonction de P_0 , ρ , v_A et v puis P_2 en fonction de P_0 , ρ , v_B et v .

3- En faisant un bilan de quantité de mouvement à un système constitué par l'hélice et limité par les surfaces Σ_1 et Σ_2 , déduire la résultante des forces $\vec{F}$ exercées par l'hélice sur le fluide en écoulement, en fonction de ρ , S , v_A et v_B . Discuter le sens de la force $\vec{F}$.

4- A partir d'un bilan de quantité de mouvement réalisé entre les sections S_A et S_B , évaluer une deuxième expression de la force $\vec{F}$. En déduire la relation donnant v en fonction des vitesses v_A et v_B .

5- Evaluer la puissance $\mathcal{P}_f$ (mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$) fournie par l'hélice au fluide en écoulement :

5-1- A partir de la valeur de $\vec{F}$,

5-2- En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système convenable. On exprimera la puissance $\mathcal{P}_f$ en fonction de v_A , v_B et du débit massique q_m circulant dans le tube de courant représenté sur la figure 1.

Indication : Entre les instants t et $t+dt$, le fluide en écoulement est caractérisé par une température constante et on néglige tout transfert thermique avec l'extérieur.

I- Application à la propulsion d'un bateau ou avion

Le système étudié a, par rapport à la Terre où le fluide est immobile à grande distance de l'hélice, une vitesse constante $\vec{u} = -u \vec{e}_x$, $u > 0$. Le fluide est éjecté vers l'arrière de l'hélice à une vitesse $\vec{v}_s = v_s \vec{e}_x$, à grande distance de celle-ci, v_s étant mesurée par rapport à la Terre.

6- Evaluer le rendement énergétique $\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_f}$ de la propulsion ; $\mathcal{P}_u$ est la puissance fournie au système

(bateau ou avion), mesurée dans le référentiel terrestre, et $\mathcal{P}_f$ est la puissance fournie par le moteur actionnant l'hélice. On exprimera η en fonction de u et v_s seulement.

7- Dans quelles conditions le rendement η serait-il maximal ? Qu'en penser ?

8- Application numérique : Calculer le rapport $\frac{v_s}{u}$ pour un avion $\eta_a = 0,85$ et pour un bateau $\eta_b = 0,60$.

II- Application à une éolienne

Pour cette application, le référentiel $\mathcal{R}$ s'identifie avec le référentiel terrestre et $v_B < v_A$.

9- Quelle est alors la forme du tube de courant caractérisant ce système ?

10- On désigne par $\mathcal{P}$ la puissance obtenue sur l'arbre de l'éolienne. On pose $x = \frac{v_B}{v_A}$ avec $(0 < x < 1)$;

S et v_A étant données, pour quelle valeur de x , la puissance $\mathcal{P}$ est-elle maximale ?

11- Le rendement énergétique r est défini comme le quotient de la puissance $\mathcal{P}$ par rapport au flux ou débit d'énergie cinétique de l'air à travers la section S_A du tube de courant. Exprimer r en fonction de x .

Que vaut r lorsque $\mathcal{P}$ est maximale ?

12- Application numérique : Calculer la puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$. On donne : $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ et $v_A = 8 \text{ m s}^{-1}$; le diamètre d de l'hélice est : $d = 10 \text{ m}$.

Partie B : Diffusion Thermique (08 points)

I-

On considère un fil métallique cylindrique, homogène, de section $S = \pi a^2$ et de longueur L . Le rayon a du fil est supposé faible par rapport à sa longueur. Le métal, constituant le fil, est caractérisé par

une conductivité thermique λ , par une résistivité électrique $\rho_e = \frac{1}{\gamma}$; (γ conductivité électrique), par une masse volumique ρ_m et par une capacité thermique massique c .

Dans la première partie de l'étude, les parois latérales du fil sont parfaitement calorifugées et les extrémités sont maintenues à des températures T_1 et T_2 (avec $T_1 > T_2$) grâce à des thermostats. La température $T(x)$ dans le fil ne dépend que de l'abscisse x (figure 2), avec $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$. Toute l'étude est réalisée en régime permanent.

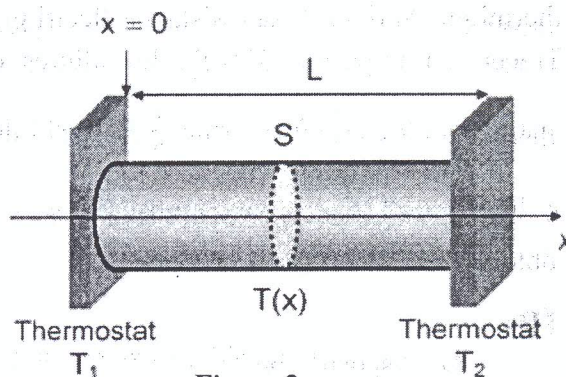


Figure 2

- 1- Rappeler la loi de Fourier relative à la densité volumique de courant $\vec{J}_{th}(x)$. Exprimer le flux (ou puissance) thermique ϕ_{th} traversant une section droite S du fil.
- 2- En réalisant un bilan énergétique sur une tranche élémentaire du fil de section S située entre les positions x et $x+dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$. En déduire la loi de répartition de température $T(x)$ en fonction de T_1 , T_2 , L et x .
- 3- Exprimer la puissance thermique $\phi_{th,2}$ cédée à la source de température T_2 en fonction de S , T_1 , T_2 , L et λ .

II-

Le fil est maintenant parcouru par un courant électrique continu d'intensité I , répartie uniformément sur toute la section S (figure 3). Les sections extrêmes (Σ_1) et (Σ_2) sont maintenues simultanément à des températures constantes T_1 et T_2 et à des potentiels constants V_1 et V_2 . Après établissement d'un régime stationnaire, les surfaces isothermes et équipotentielles sont des plans orthogonaux à l'axe Ox .

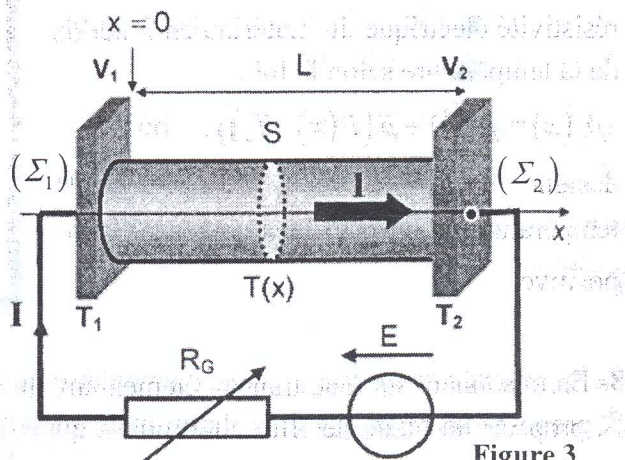


Figure 3

La résistivité électrique ρ_e du fil est indépendante de la température et le fil est considéré comme un conducteur ohmique ayant une résistance constante bien que la température $T(x)$ ne soit pas uniforme. Les dimensions du fil ne varient pas avec la température.

- 4- En appliquant la loi d'Ohm locale, exprimer la résistance élémentaire dR d'une tranche élémentaire du fil, de longueur dx et de section S . En déduire la puissance thermique volumique $\mathcal{P}_{th,v}^p$ au sein du fil en fonction de l'intensité de courant électrique I , de la section S et de la résistivité électrique ρ_e .

Indication : On rappelle qu'un conducteur électrique de longueur ℓ , de section S et parcouru par un courant le long de son axe est caractérisé par une résistance électrique $R = \frac{\rho_e \ell}{S}$

- 5- Etablir, dans ce cas et en appliquant le premier principe de la thermodynamique, l'équation différentielle vérifiée par le champ de température $T(x)$. En déduire l'expression de la température

$T(x)$, puis celle de la densité volumique du courant thermique $\vec{J}_{th}(x)$ en fonction de ρ_e , λ , S , T_1 , T_2 , L , I et x .

6- Déterminer la puissance ou flux thermique φ_{th} le long du fil, en notant $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ la résistance thermique du fil et R sa résistance électrique.

Tracer, en imposant $T_1 > T_2$, les allures du flux thermique $\varphi_{th}(x)$ et de la température $T(x)$ en distinguant les cas où le terme $\frac{1}{2} R I^2$ est inférieur ou supérieur à la quantité $\frac{1}{R_{th}}(T_1 - T_2)$. Commenter.

7- Déterminer la puissance thermique $\varphi'_{th,2}$ cédée à la source de température T_2 . Interpréter le résultat obtenu.

III-

Le dispositif précédant est maintenant placé dans une enceinte maintenue à une température uniforme T_a . Le fil cylindrique est relié à deux bornes maintenues rigoureusement à la même température T_a qui demeure constante (figure 4). Les parois du fil ne sont plus adiabatiques.

Le fil subit, à travers sa surface latérale, un transfert (perte) thermique conducto-convectif, cédé vers le milieu extérieur, dont le flux thermique à travers une surface latérale élémentaire $d\Sigma_l$ est de la forme :

$$d\varphi_{th,c} = h(T(x) - T_a)d\Sigma_l ; h \text{ étant le coefficient du transfert thermique par convection.}$$

Ce dispositif est destiné à un système expérimental de mesure de la conductivité thermique du fil métallique. Afin d'améliorer la précision de la mesure, il est utile de tenir compte de la variation de la résistivité électrique du matériau en fonction de la température selon la loi :

$\rho_e(x) = \rho_{e,a}(1 + \beta(T(x) - T_a))$, où $\rho_{e,a}$ désigne la résistivité électrique à la température T_a et β est une constante positive.

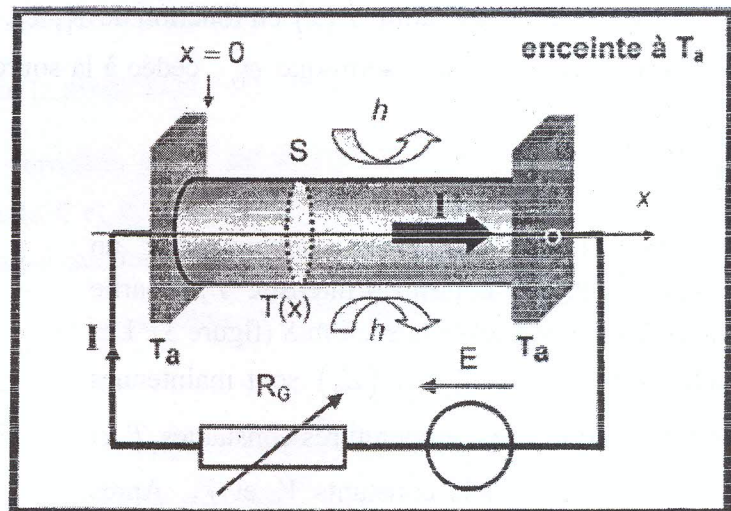


Figure 4

8- En raisonnant sur une tranche élémentaire du fil comprise entre les positions x et $x + dx$ et de section S , proposer un bilan des flux thermiques qui se produisent. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la grandeur $\theta(x) = T(x) - T_a$, sous forme : $\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m^2\theta(x) = -k$.

Exprimer m^2 en fonction du rayon a du fil, h , λ , $\rho_{e,a}$, β , S et I . On montre que l'expression de la constante k est : $k = \frac{I^2 \rho_{e,a}}{\lambda S^2}$.

9- Montrer que, selon la valeur de l'intensité de courant I , trois types de solutions de $\theta(x)$ sont attendues (On ne demande pas la résolution de l'équation différentielle obtenue).

On se place dans le cas particulier où le fil conducteur est alimenté par un courant dont l'intensité $I = I_0$ correspond à la condition $m^2 = 0$.

10- Préciser la valeur de cette intensité I_0 en fonction de h , a , $\rho_{e,a}$, β et S .

Résoudre l'équation différentielle qui en résulte en établissant la loi de variation de la température $\theta(x)$. Illustrer son évolution à l'aide d'un schéma. Commenter le résultat obtenu.

11- Exprimer la résistance électrique R_a du fil, à la température T_a , puis celle de sa résistance R lorsqu'il est à la température T en fonction de R_a , k , β , L . En déduire la variation relative de la résistance $\delta = \frac{R - R_a}{R_a}$ puis l'écrire en fonction des grandeurs h , a , λ , L et S .

Partie C : Diffusion de Particules (04 points)

Pour la fabrication de certains composants électroniques, on fait diffuser des atomes de bore dans un substrat de silicium. Cette diffusion vérifie la loi de Fick ; Le coefficient de diffusion des atomes de bore dans le silicium est noté D .

On se limite à un modèle de diffusion unidirectionnel suivant la direction (Ox) . On note $c(x, t)$ la densité particulaire par unité de volume des atomes de bore à l'abscisse x ($x \in [0, +\infty[$) et à l'instant t .

On dépose sur la face d'entrée du silicium, d'abscisse $x = 0$, et sur une épaisseur négligeable des atomes de bore dont la concentration par unité de surface est notée n_0 (n_0 est exprimée en m^{-2}).

1- Rappeler la loi de Fick.

2- En faisant un bilan de matière sur un domaine (à définir), établir une équation différentielle (E) vérifiée par la densité particulaire volumique $c(x, t)$.

On cherche une solution de la forme : $c(x, t) = B(t) \exp\left(-\frac{x^2}{A(t)}\right)$;

avec $A(t)$ et $B(t)$ sont des quantités positives.

3- Ecrire la conservation du nombre total d'atomes de bore au cours de la diffusion. Montrer que les quantités n_0 , $A(t)$ et $B(t)$ obéissent à la relation : $n_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} B(t) \sqrt{A(t)}$.

Donnée : On pourra exploiter l'intégrale $\int_{u=0}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4- En utilisant l'équation (E), déterminer $A(t)$.

5- En déduire la fonction $B(t)$.

6- Commenter les expressions de $c(x, t)$ pour $t = 0$ et $x > 0$ puis pour $x \rightarrow +\infty$ et $t > 0$.

7- Tracer l'allure de $c(x, t)$ en fonction de x à une date fixée quelconque.

8- La profondeur de diffusion est définie comme la distance h telle que : $c(x = h, t) = \frac{c(x = 0, t)}{e^1}$.

9- Etablir une relation entre h , D et t .

A.N : Calculer D pour $t = 1$ heure et $h = 5 \mu m$.