

Devoir d'Algèbre - Semestre N°2 Sections : P.C.2 et P.T.2
--

Durée : 1h30min

Date : 19 Février 2019

Nbre de pages : 2

Problème/

Partie 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à n . On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\Phi(P)(X) = P'' - 2XP' \quad , \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que $\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}$.
3. Ecrire A la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire les valeurs propres de Φ puis montrer que Φ est diagonalisable.
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes unitaires $(H_0, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(H_k) = -2kH_k$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
6. Montrer que $\deg(H_k) = k$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
7. Calculer H_0 , H_1 et H_2 .

Partie 2

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$H_{n+1}(X) = XH_n(X) - \frac{1}{2}H'_n(X).$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H'_n(X) = nH_{n-1}(X).$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2H_{n+1}(X) - 2XH_n(X) + nH_{n-1}(X) = 0.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$H_n(-X) = (-1)^n H_n(X).$$

Partie 3

Pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx.$$

1. Justifier, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$.
2. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la suite, $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

3. Démontrer que, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle \Phi(P) | Q \rangle = \langle P | \Phi(Q) \rangle$.
4. En déduire que la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que H_n est orthogonal à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. Soit $F = \left(\mathbb{R}_{n-1}[X]\right)^\perp$ et p_F la projection orthogonale sur F . Montrer que $p_F(X^n) = H_n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que

$$\|H_n\| \leq \|X^n + Q\|.$$

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|H_{n+1}\|^2 = \frac{n+1}{2} \|H_n\|^2.$$

9. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Montrer que $\|H_n\|^2 = \frac{\sqrt{\pi} n!}{2^n}$.