

Devoir de Syntèse N°2

Durée: 4H

Epreuve: Mathématiques

Date: 23-5-2019

N.B. Rédiger l'exercice et le problème 1 sur une feuille et le problème 2 sur une autre.

Exercice

Soient l'espace vectoriel $E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \text{l'application } t \mapsto f^2(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\}$ et l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ définie par :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On admet que $\forall k \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{(2k)!}{k!2^k} \sqrt{2\pi}$.

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - xt - y)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

(a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 3$.

(b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ puis déduire que f admet un unique point critique.

(c) Montrer que f présente un minimum local en $(0, 1)$.

(d) Montrer que f présente un minimum global en $(0, 1)$ que l'on déterminera.

(e) En déduire la distance entre le polynôme X^2 et le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

3) On pose l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ et la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / g(x, y, z) = 0\}$.

(a) Vérifier que $A = (0, 1, 2)$ est un point régulier de Σ .

(b) Déterminer l'équation du plan P tangent à Σ au point A .

PROBLÈME 1

On désigne dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,1}$ l'espace des vecteurs réels colonnes à n coefficients. On note $0_{n,1}$ le vecteur nul.
- $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n . On note 0_n la matrice nulle.
- tA la transposée d'une matrice A .
- $\mathcal{S}_n$ le sous espace de $\mathcal{M}_n$ des matrices symétriques A vérifiant ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n .
- $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales c'est à dire les matrices P telles que ${}^tP \cdot P = I_n$.

- $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ le produit scalaire canonique des deux vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- $Sp(M)$, le spectre d'une matrice carrée M .

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n$, alors, $\langle AX, Y \rangle = {}^t(AX)Y = \langle X, {}^tAY \rangle$.

Définitions :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite positive si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a $\langle AX, X \rangle \geq 0$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite définie si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a $\langle AX, X \rangle = 0$, alors, $X = 0_{n,1}$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite définie positive si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0_{n,1}\}$, on a $\langle AX, X \rangle > 0$.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

1. On rappelle que puisque A est une matrice symétrique réelle, alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de A .
 - (a) Montrer que si A est positive alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$
 - (b) En utilisant la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, montrer que si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, alors, A est positive.
2. (a) Montrer que si $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors, A n'est pas définie.
 - (b) Dédire que A est définie positive si et seulement si, A est positive et inversible.
 - (c) Justifier que si A est positive, alors, il existe $P \in \mathcal{O}_n$ telle que

$${}^tPAP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où les λ_i sont des réels positifs.

(d) Dédire que pour toute matrice symétrique définie positive A , il existe une matrice symétrique, définie et positive C telle que $C^2 = A$.

3. Soit A et C deux matrices symétriques définies positives telles que $C^2 = A$.

(a) Montrer que pour toute valeur propre λ de A , on a

$$\ker(A - \lambda I_n) = \ker(C - \sqrt{\lambda} I_n).$$

(b) Dédire que toute base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de C .

(c) Dédire que pour toute matrice symétrique définie positive A , il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$.

On notera $C = A^{1/2}$.

(d) **Application** : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i-) Montrer que A est symétrique définie et positive.

ii-) Donner une base orthonormée de vecteurs propres de A .

iii-) Trouver $A^{1/2}$.

4. Soit A une matrice symétrique définie positive.

(a) Montrer que A^{-1} est symétrique et définie positive.

(b) Dédire que $(A^{1/2})^{-1} = (A^{-1})^{1/2}$.

5. (a) Montrer que si f et g sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors, il existe une base commune formée de vecteurs propres de f et g .

(b) Soient A et B deux matrices symétriques définies positives telles que $AB = BA$.

i-) Justifier qu'il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres communs de A et B .

ii-) En déduire que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent.

PROBLÈME 2

Partie I

On considère la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}.$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction f_n .

(b) Montrer que $f_n(n) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. (Ind. $(n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n)$)

(c) Etablir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction que l'on déterminera.

2. (a) Déterminer le domaine de convergence de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$.

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.

(a) Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t) dt$.

(b) Etablir que, $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H'_n .

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} H_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_n(x)$.

(d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = 1$.

4. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Partie II

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et mutuellement indépendantes. On admet que dans ce cas, $\forall n \geq 2$, $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

On suppose de plus que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1.

On rappelle que si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre λ , alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. (a) Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et en déduire son espérance et sa variance.

(b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n^* .

(c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

2. Soit $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe C^{r+1} sur I , alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^r f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t) \frac{(b-t)^r}{r!} dt.$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{t^n e^{n-t}}{n!} dt.$$

3. (a) Montrer que :

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) = \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^n dt = H_n(n) \text{ où } H_n \text{ est définie dans la partie 1.}$$

(b) Etablir que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leq 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la série génératrice de S_n .

On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G}_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{S_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) t^k$.

(a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G}_{S_n}(t)$.

(b) En admettant la formule suivante : $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}$ en déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left(\frac{(\ln t)^2}{2}\right).$$