

Problème n°01:

1./ $\vec{k}_i = \frac{\omega}{v_1} \vec{u}_x = \frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x$

$\vec{k}_r = -\frac{\omega}{v_1} \vec{u}_x = -\frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x$

$\vec{k}_t = \frac{\omega}{v_2} \vec{u}_x = \frac{n_2 \omega}{c} \vec{u}_x$

2./ $\vec{B}_i(M, t) = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i(M, t)}{\omega} = \frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x \wedge \frac{E_0}{\omega} \vec{u}_y \exp j(\omega t - \frac{n_1 \omega}{c} x)$

$\Rightarrow \vec{B}_i(M, t) = \frac{n_1}{c} E_0 \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \exp j(\omega t - \frac{n_1 \omega}{c} x)$

$\vec{B}_r(M, t) = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r(M, t)}{\omega} = -\frac{n_1 \omega}{c \omega} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t + \frac{n_1 \omega}{c} x)$

$\vec{B}_r(M, t) = -\frac{n_1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t + \frac{n_1 \omega}{c} x)$

* $\vec{B}_t(M, t) = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t(M, t)}{\omega} = \frac{n_2 \omega}{c \omega} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0t} \exp j(\omega t - \frac{n_2 \omega}{c} x)$

$\vec{B}_t(M, t) = \frac{n_2}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{0t} \exp j(\omega t - \frac{n_2 \omega}{c} x)$

3./ A l'interface $x=0$ les vecteurs champs électrique et magnétique sont continus (Composantes normale et tangentielle)

$$\vec{E}_i(x=0, t) + \vec{E}_r(x=0, t) = \vec{E}_t(x=0, t) \text{ (I)} ; (\vec{E}_{0i}(x=0, t) = \vec{E}_{0t}(x=0, t))$$

$$\vec{B}_i(x=0, t) + \vec{B}_r(x=0, t) = \vec{B}_t(x=0, t) \text{ (II)}$$

$$\textcircled{I} \Rightarrow E_0 \vec{u}_y \exp j\omega t + \vec{E}_r \exp j\omega t = \vec{E}_t \exp j\omega t \quad (2)$$

$$\Rightarrow \underline{E_0 \vec{u}_y + \vec{E}_r = \vec{E}_t} \quad \textcircled{I}'$$

$$\textcircled{II} \Rightarrow \frac{n_1 E_0}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \exp j\omega t - \frac{n_1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_r \exp j\omega t = \frac{n_2}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_t \exp j\omega t$$

$$\Rightarrow \underline{E_0 \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y - \vec{u}_x \wedge \vec{E}_r = \frac{n_2}{n_1} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_t} \quad \textcircled{II}'$$

$$4./ \left\{ \begin{array}{l} E_0 \vec{u}_y + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ E_0 \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y - \vec{u}_x \wedge \vec{E}_r = \frac{n_2}{n_1} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_t \end{array} \right. \quad | \wedge \vec{u}_x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 \vec{u}_y + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ E_0 \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y - \vec{u}_x \wedge \vec{E}_r = \frac{n_2}{n_1} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_t \end{array} \right. \quad | \wedge \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow E_0 \vec{u}_x \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) - \vec{u}_x \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r) = \frac{n_2}{n_1} \vec{u}_x \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{E}_t)$$

$$\Rightarrow -E_0 \vec{u}_y + \vec{E}_r = -\frac{n_2}{n_1} \vec{E}_t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 \vec{u}_y + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ E_0 \vec{u}_y - \vec{E}_r = \frac{n_2}{n_1} \vec{E}_t \end{array} \right.$$

$$\text{on obtient } \vec{E}_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0 \vec{u}_y = \vec{E}_t \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \vec{E}_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0 \vec{u}_y ; (\vec{E}_r \in \mathbb{R})$$

5.1 Au cours du temps, les directions des vecteurs champs électriques se reflète et transmise sont fixe (suivant Oy); lors de la réflexion et de la transmission la direction de polarisation n'est modifiée; Il s'agit d'une polarisation rectiligne. Si $n_1 < n_2$, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente

$$6.1 \quad r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\vec{E}_r}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \in \mathbb{R}$$

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{\vec{E}_t}{E_0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \in \mathbb{R}$$

$$7.1 \quad \vec{R}_i(M, t) = \frac{\vec{E}_i(M, t) \wedge \vec{B}_i(M, t)}{\mu_0}$$

$$= \frac{E_0}{\mu_0} \vec{u}_y \cos\left(\omega t - \frac{n_1 \omega}{c} x\right) \wedge \frac{n_1 E_0}{c} \vec{u}_z \cos\left(\omega t - \frac{n_1 \omega}{c} x\right)$$

$$\vec{R}_i(M, t) = \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \cdot \cos^2\left(\omega t - \frac{n_1 \omega}{c} x\right)$$

$$\langle \vec{R}_i(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$8.1 \quad \vec{R}_r(M, t) = \frac{\vec{E}_r(M, t) \wedge \vec{B}_r(M, t)}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} r E_0 \vec{u}_y \cos\left(\omega t + \frac{n_1 \omega}{c} x\right) \wedge \left(-\frac{n_1 r E_0}{c}\right) \vec{u}_z \cos\left(\omega t + \frac{n_1 \omega}{c} x\right)$$

$$\vec{R}_r(M, t) = -\frac{n_1 r^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega t + \frac{n_1 \omega}{c} x\right) \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{R}_r(M, t) \rangle = -\frac{n_1 r^2 E_0^2}{2 \mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\vec{R}_t(M, t) = \frac{\vec{E}_t(M, t) \wedge \vec{B}_t(M, t)}{\mu_0} = \frac{n_2 t^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - \frac{n_2 \omega}{c} x\right) \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{R}_t(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_2 t^2 E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$9.1 \quad R = \frac{\|\langle \vec{R}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{R}_i \rangle\|} = \frac{\frac{1}{2} \frac{n_1 r^2 E_0^2}{\mu_0 c}}{\frac{1}{2} \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c}} = r^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

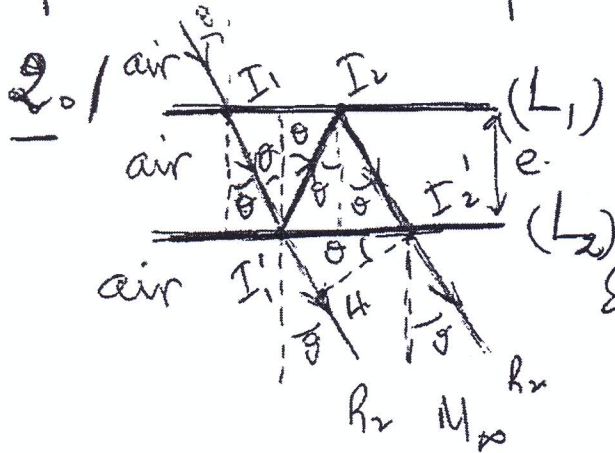
$$T = \frac{\|\langle \vec{R}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{R}_i \rangle\|} = \frac{\frac{1}{2} \frac{n_2 t^2 E_0^2}{\mu_0 c}}{\frac{1}{2} \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c}} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$T + R = 1$; il y a Conservation de l'énergie à l'interface.

Problème n°02:

(4)

1. Il s'agit d'un dispositif interférentiel à ondes multiples par division d'amplitude.



$$S(M_\infty) = (S M_\infty)_2 - (S M_\infty)_1$$

$$S(M_\infty) = [(S I_1) + (I_1 I_1') + (I_1' I_2) + (I_2 I_2') + (I_2' I_2'')] - [(S I_1') + (I_1' I_1'') + (I_1'' I_2) + (I_2 I_2')] - (I_2' I_2'')$$

$$(I_1' I_2) = (I_2 I_1') = \frac{e}{\cos \theta} = I_1 I_2$$

$$(I_1' I_2') = I_1' I_2' \sin \theta$$

$$\text{d'autre part } \tan \theta = \frac{I_1' I_2' / 2}{e} \Rightarrow I_1' I_2' = 2e \tan \theta$$

$$\Rightarrow I_1' I_2' = 2e \tan \theta \sin \theta = 2e \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$S(M_\infty) = 2 I_1 I_2 - I_1' I_2'$$

$$= \frac{2e}{\cos \theta} - 2e \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2e \cos \theta : \boxed{S(M_\infty) = 2e \cos \theta}$$

$$\text{et } \Delta \varphi(M_\infty) = \frac{2\pi}{\lambda} S(M_\infty) = \frac{4\pi e \cos \theta}{\lambda}$$

3. Le 1^{er} rayon lumineux transmis de l'interféromètre est décrit par l'amplitude A_1 de la vibration lumineuse associée.

$$A_1 = A_0 t_1 t_2 \exp -j\varphi_0 ; \text{ le déphasage } \varphi_0 \text{ est dû à la traversée du trajet } I, I'$$

on a $t_1, t_2 = 1 \Rightarrow \underline{A_1(M_0)} = T A_0 \exp(-j\psi_0)$ (5)

et $\underline{|A_1(M_0)|} = T A_0$

pour le 2^{eu} rayon lumineux, l'amplitude de la vibration correspondante est $\underline{A_2(M_0)} = r_1 r_2 A_1(M_0) \exp(j\Delta\psi)$

$r_1 r_2 = R \Rightarrow \underline{A_2(M_0)} = R T A_0 \exp(-j\psi_0) \exp(-j\Delta\psi)$

avec $\Delta\psi = \frac{4\pi e \cos\theta}{\lambda}$

4.1 on a $\underline{A_1(M_0)} = T A_0 \exp(-j\psi_0)$

$\underline{A_2(M_0)} = R T A_0 \exp(-j\psi_0) \exp(-j\Delta\psi)$

pour le 1^{ère} rayon émergent $\underline{A_1(M_0)}$ s'écrit :

$\underline{A_i(M_0)} = R \exp(-j\Delta\psi) \underline{A_{i-1}(M_0)}$

$= R \exp(-j\Delta\psi) [R \exp(-j\Delta\psi) \underline{A_{i-2}(M_0)}]$

$= R^2 \exp(-j2\Delta\psi) \underline{A_{i-2}(M_0)}$

$\vdots$
 $= R^i \exp(-j(i\Delta\psi)) \underline{A_1(M_0)}$

$\underline{A_i(M_0)} = R^i \exp(-j(i\Delta\psi)) T A_0 \exp(-j\psi_0)$, (avec $R < 1$)

5.1 Tous les rayons émergents sont produits à partir

d'un même rayon primaire (SI). Ils sont (6)
 donc cohérents entre eux. En plus, ils sont synchrones.
 Ils produisent donc un phénomène d'interférences
 à ondes multiples à l'infini. Dans ce cas se sont
 les amplitudes de vibrations lumineuses qui s'ajoutent
 l'amplitude résultante s'écrit :

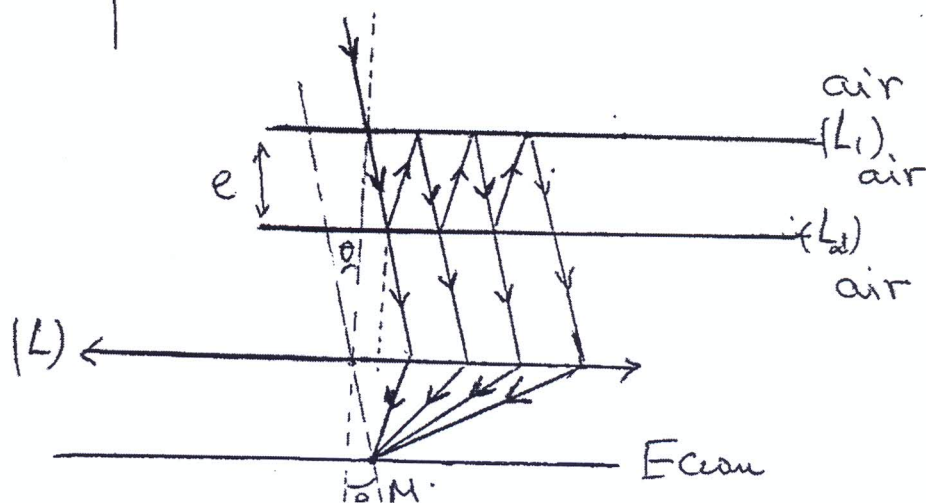
$$\underline{A(M_0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{A_i(M_0)} = I A_0 \exp(-j \varphi_0) \sum_{i=1}^{\infty} R^i \exp(j i \Delta \varphi)$$

il s'agit d'une progression géométrique de première
 terme 1 et de raison $R \exp(j \Delta \varphi)$: $(R^n \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty)$
 $R < 1$

il vient :

$$\underline{A(M_0)} = I A_0 \exp(-j \varphi_0) \frac{1}{1 - R \exp(j \Delta \varphi)}$$

6.1 Il faut utiliser une lentille convergente (L) de
 distance focale f et on observe dans son plan focal
 image où on place l'écran (E)



7.1 ona : $I(M) = \frac{1}{2} K \underline{A}(M) \cdot \underline{A}^*(M) \exp(j\omega t) \exp(-j\omega t) \quad (7)$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \cdot I A_0 \exp(j\varphi_0) \cdot \frac{1}{1 - R \exp(-j\Delta\varphi)} \cdot I A_0 \exp(j\varphi_0) \cdot \frac{1}{1 - R \exp(j\Delta\varphi)}$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K I^2 A_0^2 \frac{1}{(1 - R \exp(-j\Delta\varphi))(1 - R \exp(j\Delta\varphi))}$$

$$(1 - R \exp(-j\Delta\varphi))(1 - R \exp(j\Delta\varphi)) = 1 + R^2 - 2R \cos(\Delta\varphi)$$

$$\cos(\Delta\varphi) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} 1 + R^2 - 2R \cos(\Delta\varphi) &= 1 + R^2 - 2R \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right) \\ &= (1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K I A_0^2 \frac{1}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} K A_0^2 (1 - R)}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} K A_0^2 / (1 - R)}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$\frac{1}{2} K A_0^2 \frac{1}{(1 - R)} = I_{\max}$ homogène à une amplitude d'une intensité lumineuse.

$$I(M) = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{T^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

avec $\Delta\varphi = \frac{4\pi e \cos \theta}{\lambda}$

8.1 si le déphasage $\Delta\varphi$ varie, la quantité (8)

$1 + \frac{4R}{T^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ varie entre 1 et $1 + \frac{4R}{(1-R)^2}$. Il en résulte que $I(M)$ varie entre $I_{\max}$ et $\frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}}$ c'est à dire il y a une alternance périodique entre les minima et les maxima d'intensité lumineuse. On obtient une intensité maximale $I(M) = I_{\max}$ c'est à dire $\frac{\Delta\varphi}{2} = k\pi$; k est un entier ($\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0$).

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta\varphi = 2k\pi = \frac{4\pi e \cos\theta}{\lambda}}}$$

9.1 / pour un angle d'incidence donné, on fait varier e

$$I(M) = I_{\max} \Rightarrow \Delta\varphi = 2k\pi = \frac{4\pi e_k \cos\theta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow e_k = \frac{k\lambda}{2 \cos\theta}$$

pour un angle d'incidence faible $\cos\theta \approx 1$

$$\underline{\underline{e_k = \frac{k\lambda}{2}}}$$

9.2 / L'intensité $I(M) = I(\Delta\varphi)$ est 2π périodique et elle est maximale pour $\Delta\varphi = 0 \equiv (2\pi)$.

La largeur à mi-hauteur d'un maximum d'intensité est tel que $I(M) = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$

$$2 = 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) \Rightarrow \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\frac{\Delta\psi}{2} = 1 \quad (9)$$

$$\sin^2\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) = \frac{1}{4R/(1-R)^2} \quad \text{et } R \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{4R}{(1-R)^2} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4R(1-R)^2} \rightarrow 0.$$

$$\sin^2\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) \approx \left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4R/(1-R)^2} \ll 1$$

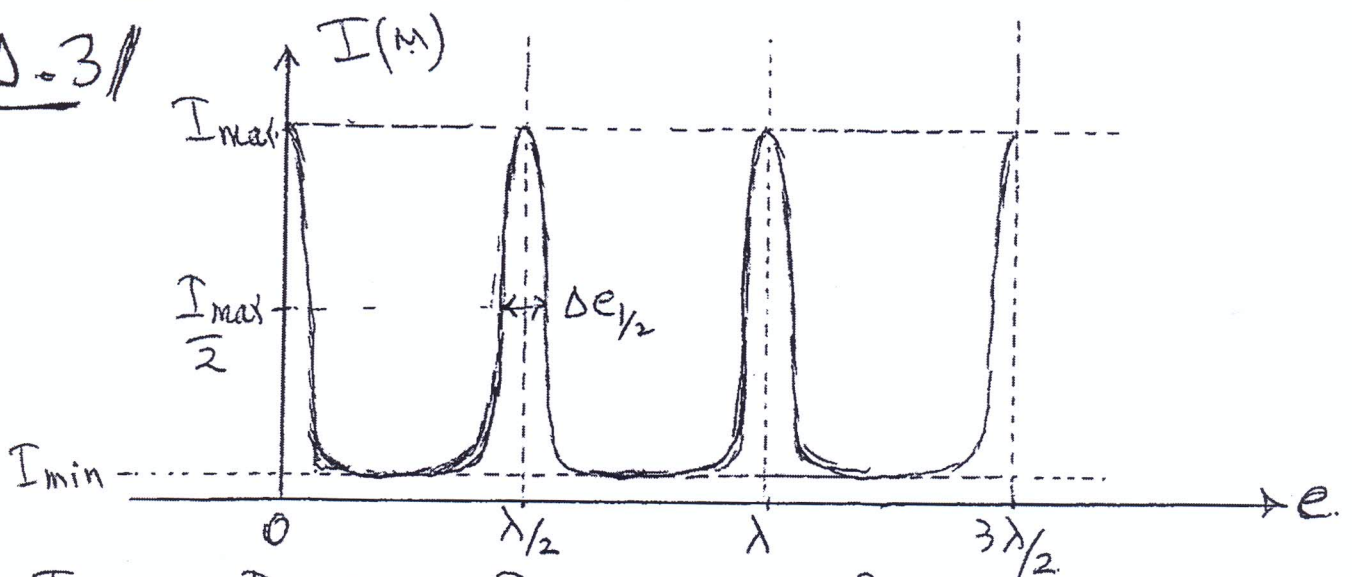
$$\frac{\Delta\psi}{2} = \pm \sqrt{\frac{(1-R)^2}{4R}} = \pm \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \Delta\psi = \pm \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

$$\Delta\psi = \psi_{1/2} = \frac{4\pi \cdot e_{1/2}}{\lambda} = \pm \frac{1-R}{\sqrt{R}} \Rightarrow e_{1/2} = \pm \frac{\lambda(1-R)}{4\pi\sqrt{R}}$$

$$\Delta e_{1/2} = + \frac{\lambda(1-R)}{4\pi\sqrt{R}} - \left(- \frac{\lambda(1-R)}{4\pi\sqrt{R}}\right).$$

$$\Delta e_{1/2} = \frac{\lambda(1-R)}{2\pi\sqrt{R}} \quad \text{et } \Delta\psi_{1/2} = \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

2.3



$$I_{\min} = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}} \ll I_{\max} \quad \text{Car } \frac{4R}{1-R} \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow 1)$$

9.4/ La finesse de l'interféromètre

(10)

$$F = \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta e_{1/2}}$$

$$e_k = \frac{k\lambda}{2} \text{ pour } \theta \text{ faible}$$

$$e_{k-1} = \frac{(k-1)\lambda}{2} ; \Delta e_{1/2} = \frac{\lambda(1-R)}{2\pi\sqrt{R}}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\frac{k}{2} - \frac{(k-1)}{2}}{\Delta e_{1/2}} = \frac{\lambda}{2} \frac{2\pi\sqrt{R}}{\lambda(1-R)}$$

$$F = \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{(1-R)}$$

$$\text{AN: } F = \frac{\pi \cdot \sqrt{0,99}}{1 - 0,99}$$

$$R = 0,99 \mid = 312,58$$

Problème n° 03:

$$1./ \vec{E}(M,t) = \vec{E}(z,t) = E_0 \vec{e}_x \cdot \cos(\omega t - kz) ; k = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \nabla \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{B}(M,t) = \vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \vec{e}_y \cos(\omega t - kz)$$

$$2./ \vec{R}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \vec{e}_z \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\langle \vec{R}(M,t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{c\mu_0} \vec{e}_z = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z$$

3./ Contrairement au cas d'une onde plane (étudié),
sur le plan $z = ct$, l'amplitude de l'onde associée à un
faisceau réel n'est pas la même en tout point de cette surface
($z = ct$)

Cette forme du champ E_M n'est pas compatible avec la représentation d'un faisceau Laser réel.

(11)

$$4.1/ \langle \mathcal{P} \rangle = \iint_{S=\pi b^2} \langle \vec{R}(M,t) \rangle dS \vec{e}_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \|\langle \vec{R}(M,t) \rangle\| N r dr d\theta.$$

puisque $\vec{E}(r > b, t) = \vec{0}$.

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \pi b^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \pi b^2$$

$$E_0^2 = \frac{2 \langle \mathcal{P} \rangle}{\epsilon_0 c \pi b^2} \quad \text{A.N: } E_0 = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 4}{3 \times 10^8 (0.5)^2} \frac{9 \times 10^9}{10^{-6}}}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle \mathcal{P} \rangle}{\pi \epsilon_0 c b^2}} \quad ; \quad E_0 = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 9}{3 \times (0.5)^2} \times 10^9} = 3,1 \times 10^5 \text{ V/m}$$

5.1 A cause du phénomène de diffraction; A partir de $z=0$ où le rayon du faisceau est le plus faible (Waist), on assiste à la divergence du faisceau Laser.

Lors de l'étude de la diffraction de la lumière par une fente fine de largeur a ; on montre que la largeur angulaire du pic centrale de diffraction est $\theta = \frac{\lambda}{a}$.

pour le faisceau considéré de rayon b $\theta = \frac{\lambda}{b}$.

$$\text{A.N. } \lambda \theta = \frac{632,8 \times 10^{-9}}{0,5 \times 10^{-3}} = 1,265 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$6.1/ E(M) = E(z) \stackrel{?}{=} E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right)$$

on a $E(M) = E_0 \exp\left(-\frac{k r^2 z_0}{(z^2 + z_0^2)}\right)$.

Or : $-\frac{k z_0}{z^2 + z_0^2} = \frac{z_0^2 (k/z_0)}{z_0^2 (1 + (\frac{z}{z_0})^2)} = \frac{1}{\frac{z_0}{k} (1 + (\frac{z}{z_0})^2)}$

$E(M) = E_0 \exp\left(-\frac{k r^2 z_0}{(z^2 + z_0^2)}\right) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\frac{z_0}{k} (1 + (\frac{z}{z_0})^2)}\right)$
 $= E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right)$

En identifiant, on trouve $w(z) = \frac{z_0}{k} (1 + (\frac{z}{z_0})^2)$

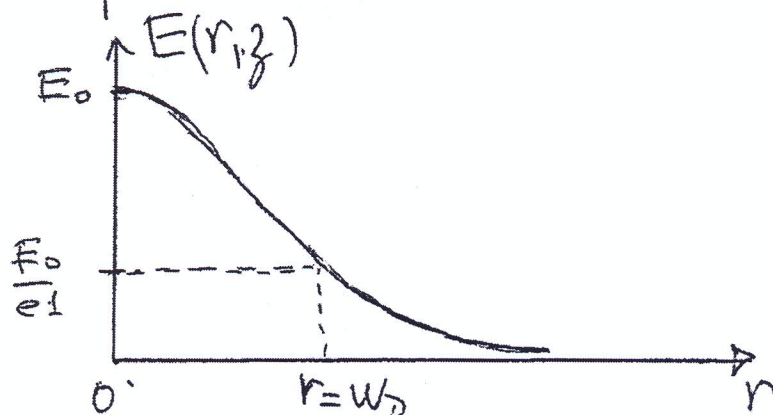
avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$

$\Rightarrow w(z) = \frac{z_0 \lambda}{\pi} \sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2}$. pour $z=0 \Rightarrow w(0) = w_0 = \frac{z_0 \lambda}{\pi}$
 $\Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{\pi}}$

$\Rightarrow w(z) = w_0 \sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2}$; $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0 z_0}{\pi}}$

$[w_0^2] = L \times L = L^2 \Rightarrow [w_0] = L \text{ (m)}$

$w(z)$ est exprimé en m.



pour z fixé,

$E \rightarrow E$ si $r \rightarrow 0$

$E \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$

$E \rightarrow \frac{E_0}{e^2}$ si $r \rightarrow w_0$

$w(z)$ apparaît comme le rayon moyen du faisceau Laser

la valeur minimale de $w(z)$ et $w(z=0)=w_0$ (13)
 w_0 représente le rayon de la section la plus faible
 du faisceau laser gaussien.

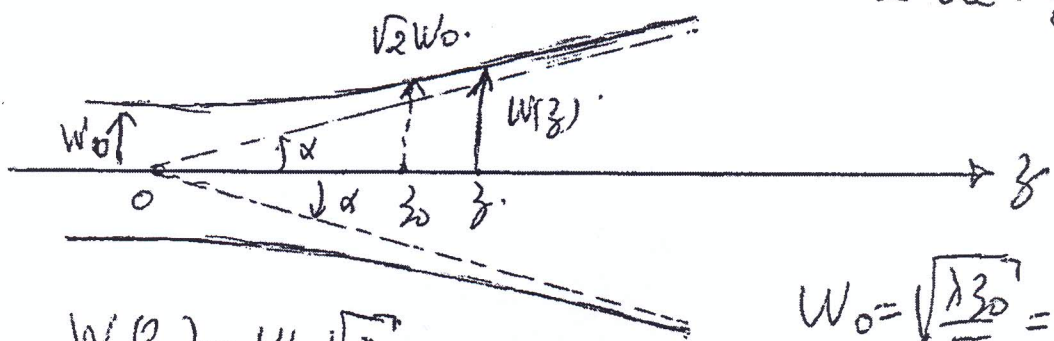
la forme du champ E.M. adopté et donc compatible
 avec les propriétés du faisceau laser réel.

l'expression de $\vec{E}, \vec{H}$ montre qu'elle est orientée à
 chaque instant t suivant (Ox) ; il s'agit d'une polarisa-
 tion rectiligne, suivant (Ox)

Ex. on a $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$ en m.

$$\text{Si } z \gg z_0, \quad 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \approx \frac{z^2}{z_0^2}$$

$$\Rightarrow w(z \gg z_0) \approx w_0 \frac{z}{z_0} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \frac{1}{z_0} \cdot z = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} \cdot z = \alpha \cdot z$$



$$\text{Si } z = z_0 \quad w(z_0) = w_0 \sqrt{2}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = 0,63 \text{ mm}$$

Si $z \gg z_0$ le faisceau laser a une forme conique (divergente)
 le demi angle au sommet α . $\tan \alpha = \frac{w(z)}{z} \approx \alpha$

$$w(z) = \tan \alpha \cdot z = \alpha z = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} \cdot z \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \theta$$

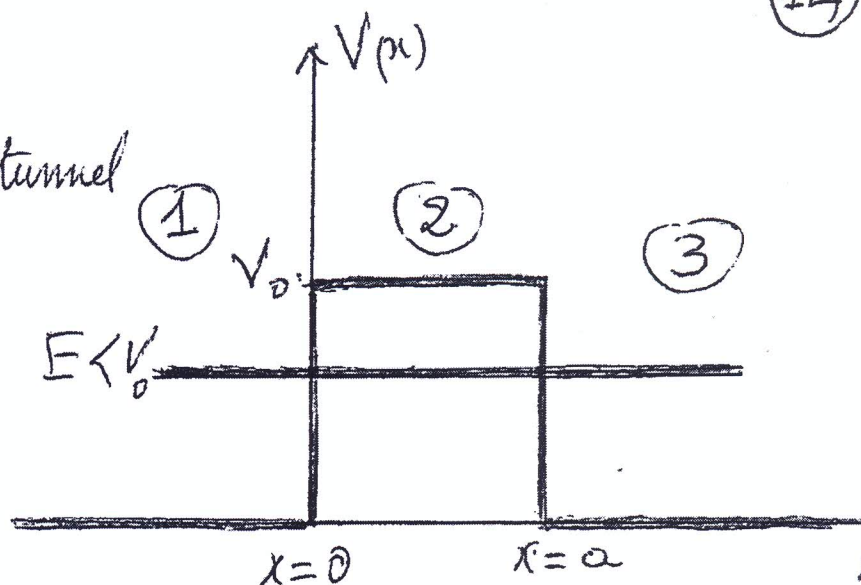
$$\text{A.N.: } \alpha = \sqrt{\frac{632,8 \cdot 10^{-9}}{\pi \cdot 0,001}} = 3,1735 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

Problème n° 04 :

(14)

1. / applications de l'effet tunnel ou barrière :

- Radioactivité α
- Microscope à effet tunnel.



2. / Dans le cadre de la mécanique classique, il n'est pas possible de franchir une barrière de potentiel que si l'énergie mécanique E_m est supérieure à l'énergie potentielle E_p : $E_m > E_p \Rightarrow E_m - E_p = E_c = \frac{1}{2} m v^2 > 0$

Dans la région (2) $E_m < E_p$: la particule classique devrait rebondir sur la barrière : la mécanique classique a un effet déterministe ($\neq$ probabiliste).
Par contre si $E > V_0 = E_p$, la particule classique est totalement transmise.

3.1. / Une particule quantique placée dans un potentiel $V(x)$ obéit à l'équation de Schrödinger lors de son évolution :
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x,t) = j \hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

la solution associée aux états stationnaires est de la forme
$$\psi(x,t) = \phi(t) \phi(x) = \phi(x) \exp(-j \frac{E}{\hbar} t)$$

3.2/ l'équation de Schrödinger dans le cas où la particule est décrite par des états stationnaires (15)
 s'écrit: $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = (V(x) - E) \psi(x) (*)$

Dans la région (1) $V(x) = 0$ ($x < 0$)

$$(*) \Rightarrow \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0 ; \text{ on pose } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = A_1 \exp(jkx) + A_1' \exp(-jkx) ; \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Dans la région (2) $V(x) = V_0 > E$ ($0 < x < a$)

$$(*) \Rightarrow \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \psi_2(x) = 0 ; \text{ on pose } \gamma^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = A_2 \exp(\gamma x) + A_2' \exp(-\gamma x) \quad \gamma = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Dans la région (3) $V(x) = 0$ ($x > a$)

$$(*) \Rightarrow \frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_3(x) = 0 \text{ le même } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

$$\Rightarrow \psi_3(x) = A_3 \exp(jkx) + A_3' \exp(-jkx)$$

$$3.3/ \psi_3(x, t) = \exp(-j \frac{E}{\hbar} t) (A_3 \exp(jkx) + A_3' \exp(-jkx))$$

$$= A_3 \exp(-j(\frac{E}{\hbar} t - kx)) + A_3' \exp(-j(\frac{E}{\hbar} t + kx))$$

Dans la région (3), le terme de $\psi_3(x, t)$, proportionnel à $\frac{E}{\hbar} + kx$ correspond à une particule provenant de $+\infty$ doit être nul ($A_3' = 0$) car il n'y a pas de source de particules à l'infini.

$$\Rightarrow \psi_1(x, t) = A_1 \exp -j\left(\frac{E}{\hbar}t - kx\right) + A_1' \exp -j\left(\frac{E}{\hbar}t + kx\right) \quad (16)$$

$$\psi_2(x, t) = A_2 \exp -j\frac{E}{\hbar}t \exp(-\gamma x) + A_2' \exp(-j\frac{E}{\hbar}t) \exp(+\gamma x)$$

$$\psi_3(x, t) = A_3 \exp -j\left(\frac{E}{\hbar}t - kx\right).$$

3.4. (i). $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$

(ii) $\psi_2(x=a) = \psi_3(x=a)$

(iii) $\frac{d\psi_1}{dx}(x=0) = \frac{d\psi_2}{dx}(x=0)$

(iv) $\frac{d\psi_2}{dx}(x=a) = \frac{d\psi_3}{dx}(x=a)$

(i) $\Rightarrow A_1 + A_1' = A_2 + A_2'$

(ii) $\Rightarrow A_2 \exp(-\gamma a) + A_2' \exp(+\gamma a) = A_3 \exp(jka)$

(iii) $\Rightarrow jk A_1 - jk A_1' = -\gamma A_2 + \gamma A_2'$

(iv) $\Rightarrow -\gamma A_2 \exp(-\gamma a) + \gamma A_2' \exp(+\gamma a) = jk A_3 \exp(jka)$

On recherche pas d'écrire A_1' , A_2 , A_2' et A_3 en fonction de A_1 .

3.5. $T_p = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2) \sinh^2(\gamma a)} = \frac{1}{1 + \frac{(\gamma^2 + k^2) \sinh^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2}}$

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\gamma = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

$(\gamma^2 + k^2)^2 = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2$, $k^2 \gamma^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

$\frac{(\gamma^2 + k^2)^2}{4k^2 \gamma^2} = \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \Rightarrow T_p = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\gamma a)}$

$$T_p = \frac{1}{1 + \frac{1}{4 \frac{E}{V_0} (1 - \frac{E}{V_0})} \frac{\hbar^2 \sqrt{2m V_0 (1 - \frac{E}{V_0})} a}{\hbar^2}}$$

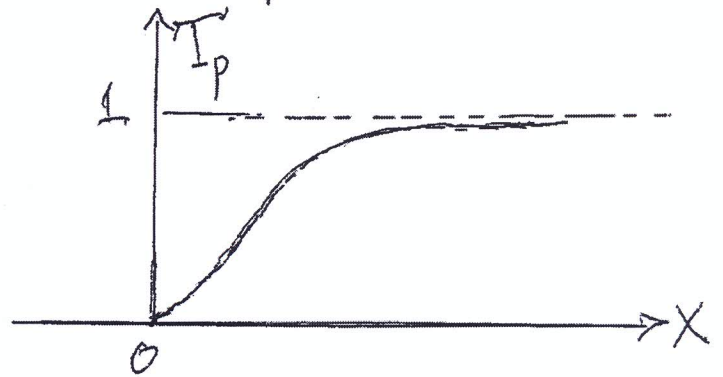
$$T_p = \frac{1}{1 + \frac{1}{4X(1-X)} \frac{\hbar^2 \sqrt{2m V_0 (1-X)} a}{\hbar^2}}$$

si $V_0 \gg E \Rightarrow \frac{V_0}{E} \gg 1 \Rightarrow T_p \rightarrow 0$

si $a \gg \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \hbar \gamma a \rightarrow \infty \Rightarrow T_p \rightarrow 0$

si $\frac{E}{V_0} \gg 1 \Rightarrow T_p \rightarrow 1$

pour a formée.



3.6. / $T_p = \frac{1}{1 + (V_0^2 / 4E(V_0 - E)) \hbar^2 \gamma a}$

* barrière mince: $a \ll \frac{1}{\gamma} \Rightarrow a\gamma \ll 1$

$\Rightarrow \hbar \gamma a \rightarrow 0 \Rightarrow T_p \approx \frac{1}{1 + V_0^2 / 4E(V_0 - E)} < 1$

* barrière épaisse: $a \gg \frac{1}{\gamma} \Rightarrow a\gamma \gg 1$

$\hbar \gamma a = \frac{\exp(\gamma a) - \exp(-\gamma a)}{2} \approx \frac{1}{2} \exp(\gamma a)$

$T_p \approx \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \frac{1}{4} \exp(2\gamma a)} \approx \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-2\gamma a)$

; $\gamma = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

pour un potentiel quelconque V_0 mais $E = E_c \rightarrow V_0$. (18)
 $\Rightarrow (V_0 \rightarrow E) \rightarrow 0$

$$T_p = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \cdot \frac{\hbar^2 \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \cdot \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} a}}$$

$$T_p = \frac{1}{1 + \frac{m a^2 V_0^2}{2 \hbar^2 E}} \approx \frac{1}{1 + \frac{m a^2 V_0}{2 \hbar^2}}$$

3.7. / On se place dans le cas ou $a \gg 1 \Rightarrow a \gg \frac{1}{\gamma}$
 il s'agit d'un potentiel épais.

D'après la question 3.6, $T_p = \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-2 \gamma a)$

$$T_p = \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-2 \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a\right)$$

A.N.

Pour un électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $\hbar = 2\pi \hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$.
 $V_0 = 2 \text{ eV}$; $E = 1 \text{ eV}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

$$T_p(e) = \frac{16 \times 1 \cdot (2 - 1)}{2 \times 2} \exp\left(-2 \sqrt{\frac{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{(1,05)^2 \cdot 10^{-68}} \times 10^{-9}}\right)$$

$$T_p(e) = 4 \exp(-10,27) = 1,8 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Avec une telle épaisseur de la barrière $a = 1 \text{ nm}$, la particule quantique (e^-) est pratiquement réfléchi.

pour garantir la transmission de l'e⁻ à travers la barrière de potentiel, il faut que l'épaisseur de la barrière soit plus faible : par exemple $a \approx 0,1 \text{ nm}$. (19)

pour un proton $m_p \approx 1830 \cdot m_e$.

Logique $T_p(p)$ doit être plus faible que celui de l' (d'après l'expression approchée de T_p).

$$\begin{aligned} T_p(p) &= \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-2 \sqrt{\frac{2m_p(V_0 - E)}{\hbar^2}} a\right) \\ &= \frac{16 \times 1(2-1)}{2 \times 2} \exp\left(-2 \sqrt{\frac{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{(1,05)^2 \cdot 10^{-38}}} \times 10^{-9}\right) \\ &= 4 \cdot \exp(-4,4 \times 10^3) \ll 1 \end{aligned}$$

la barrière de $a = 1 \text{ nm}$ est strictement infranchissable par effet tunnel pour un proton.

$$\gamma_a = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a : e^- : \gamma_{e-a} = \sqrt{\frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2}} a = 5$$

$$p \quad \gamma_{p-a} = \sqrt{\frac{2m_p(V_0 - E)}{\hbar^2}} a \approx 200$$

la condition $\gamma_a \gg 1$ est largement vérifiée dans le cas.

du proton mais ne l'est pas pour l'électron ce qui met en cause l'approximation faite. Dans cette condition expérimentale ($a = 1 \text{ nm}$; $E = 1 \text{ eV}$ et $V_0 = 2 \text{ V}$), on doit utiliser l'expression générale de T_p .

3.80/ Par définition le vecteur densité de courant de probabilité est: $\vec{j} = \frac{j\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ (20)

En effet, on a $dS = \psi \psi^* dx$: est la probabilité de présence
 $= \psi \psi^* \cdot \frac{\hbar k}{m} dx = \frac{1}{-j2k} \frac{\partial}{\partial x} (\psi \psi^*) \cdot \frac{\hbar k}{m} dx$
 $\frac{dS}{dt} = \phi = \frac{j}{2} \cdot \frac{\hbar}{m} \frac{\partial (\psi \psi^*)}{\partial x}$ est le flux de courant de probabilité

$\vec{j} = \phi \vec{e}_x = \frac{j\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \vec{e}_x$
 pour $x < 0$

$\psi_1(x,t) = A_1 \exp -j \left(\frac{E}{\hbar} t - kx \right) + A'_1 \exp -j \left(\frac{E}{\hbar} t + kx \right)$

$\psi_1^*(x,t) = A_1^* \exp +j \left(\frac{E}{\hbar} t - kx \right) + A'^*_1 \exp +j \left(\frac{E}{\hbar} t + kx \right)$

$\vec{j}_0 = \frac{j\hbar}{m} \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \vec{e}_x$ $A_1, A_1^* = |A_1|^2$
 $= \frac{\hbar k}{m} (|A_1|^2 - |A'_1|^2) \vec{e}_x$ $A'_1, A'^*_1 = |A'_1|^2$

$\vec{j}_{0I} = \frac{\hbar k}{m} |A_1|^2 \vec{e}_x$: densité de flux incident de probabilité

$\vec{j}_R = -\frac{\hbar k}{m} |A'_1|^2 \vec{e}_x$ " " réfléchi " "

pour $x > a$ $\psi_3 = A_3 \exp -j \left(\frac{E}{\hbar} t - kx \right)$

$\psi_3^* = A_3^* \exp +j \left(\frac{E}{\hbar} t - kx \right)$

$\Rightarrow \vec{j}_{(3)} = \frac{\hbar k}{m} |A_3|^2 \vec{e}_x$

$R_p = \frac{|\vec{j}_{0R}|}{|\vec{j}_{0I}|} = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2}$ et $T_p = \frac{|\vec{j}_{(3)}|}{|\vec{j}_{0I}|} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$

$T_p + R_p = 1$ traduit l'assertion que la particule soit transmise ou réfléchie