

Devoir de Physique du Fin du 2^{ème} Semestre
(Durée : 4 h)

Instructions générales :

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et à la netteté de la copie.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à attribution de points

Problème N° 01 : Interface entre deux milieux transparents

On s'intéresse à la réflexion et à la transmission en incidence normale d'une onde électromagnétique incidente sur une interface plane infinie (plan $x=0$) séparant deux milieux transparents (1) et (2) d'indices de réfraction respectifs n_1 et n_2 constants (figure 1).

L'onde électromagnétique incidente supposée plane monochromatique de pulsation ω provenant du milieu (1) se propageant dans le sens des x croissants arrive à l'interface $x=0$.

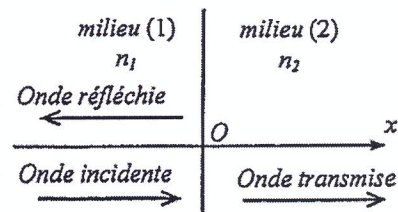


Figure 1

Selon les lois de Descartes, celle-ci donnera naissance à une onde plane réfléchi dans le milieu (1) et à une onde plane transmise dans le milieu (2). On admettra que ces deux ondes possèdent la même pulsation que celle de l'onde incidente.

On prendra comme expression :

- du champ électrique associé à l'onde incidente : $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \vec{u}_y \exp j \left(\omega t - n_1 \frac{\omega}{c} x \right)$.
- du champ électrique associé à l'onde réfléchi: $\vec{E}_r(x,t) = \vec{E}_{0r} \exp j \left(\omega t + n_1 \frac{\omega}{c} x \right)$.
- du champ électrique associé à l'onde transmise : $\vec{E}_t(x,t) = \vec{E}_{0t} \exp j \left(\omega t - n_2 \frac{\omega}{c} x \right)$.

L'amplitude E_0 est supposée réelle, alors que les vecteurs $\vec{E}_{0r}$ et $\vec{E}_{0t}$ sont à priori complexes.

- 1- Exprimer les vecteurs d'onde $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$ des ondes incidente, réfléchi et transmise.
- 2- Déterminer, sous la forme d'un produit vectoriel, les champs magnétiques $\vec{B}_i(x,t)$, $\vec{B}_r(x,t)$ et $\vec{B}_t(x,t)$ associés aux trois ondes.
- 3- En admettant la continuité des vecteurs champs électrique et magnétique à l'interface $x=0$, déduire deux équations reliant $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_y$, $\vec{E}_{0r}$ et $\vec{E}_{0t}$.
- 4- Exprimer alors $\vec{E}_{0r}$ et $\vec{E}_{0t}$ en fonction de $\vec{E}_0$, n_1 et n_2 .

On pourra utiliser la relation du double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$.

- 5- Préciser l'état de polarisation des ondes réfléchi et transmise et discuter l'existence d'éventuel déphasage des ondes réfléchi et transmise par rapport à l'onde incidente.

6- On définit les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour le champ électrique par :

$r = \frac{E_{or}}{E_o}$ et $t = \frac{E_{ot}}{E_o}$. Exprimer les coefficients r et t en fonction de n_1 et n_2 .

7- Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{R}_i(x,t) \rangle$ de l'onde incidente en fonction de c , ϵ_0 , E_o , n_1 et $\vec{u}_x$.

8- Déterminer de même les expressions de $\langle \vec{R}_r(x,t) \rangle$ et $\langle \vec{R}_t(x,t) \rangle$ des valeurs moyennes des vecteurs de Poynting associées respectivement aux ondes réfléchie et transmise.

9- On définit les coefficients de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ en puissance, ou encore en intensité,

à l'interface $x=0$ par : $\mathcal{R} = \frac{\|\langle \vec{R}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{R}_i \rangle\|}$ et $\mathcal{T} = \frac{\|\langle \vec{R}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{R}_i \rangle\|}$.

Exprimer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ en fonction de n_1 et n_2 . Vérifier que : $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$. Que traduit cette relation?

Problème N° 02 : Interférences à ondes multiples

Un interféromètre à ondes multiples Fabry Péro est constitué de deux lames de verre à faces parallèles (L_1) et (L_2), transparentes, d'indice de réfraction réel n et d'épaisseur négligeables. Les faces en regard sont notées A_1B_1 et A_2B_2 . Elles sont rendues partiellement réfléchissantes en réalisant un dépôt métallique. Elles sont maintenues rigoureusement parallèles et écartée l'une de l'autre de la distance e . La zone limitée par les deux lames est occupée par l'air d'indice égal à l'unité ($n_{air}=1$).

les faces A_1B_1 et A_2B_2 ont des facteurs de transmission en amplitude respectivement notés t_1 et t_2 et des facteurs de transmission en intensité égaux, noté $\mathcal{T}$: on admettra que $\mathcal{T} = t_1 \cdot t_2$.

Par ailleurs, les coefficients de réflexion en amplitude et en intensité du milieu d'indice n sur les faces A_1B_1 et A_2B_2 seront respectivement notés $r=r_1=r_2$ et $\mathcal{R}$, avec $\mathcal{R}=r^2$.

On ne tiendra pas compte des réflexions sur les faces extérieures non métallisées de l'interféromètre ainsi que le déphasage dû à la réflexion air-verre des rayons lumineux transmis et on néglige l'absorption des lames : on a alors $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$.

On éclaire le dispositif interférentiel par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde λ . Un rayon lumineux incident, issu de cette source et dont l'amplitude de la vibration lumineuse est notée A_0 , éclaire le dispositif sous un angle θ (faible) donne lieu à plusieurs rayons transmis qui émergent du dispositif d'une façon parallèle sous le même angle θ (figure 2). Les amplitudes des vibrations lumineuses associées sont notées respectivement $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$.

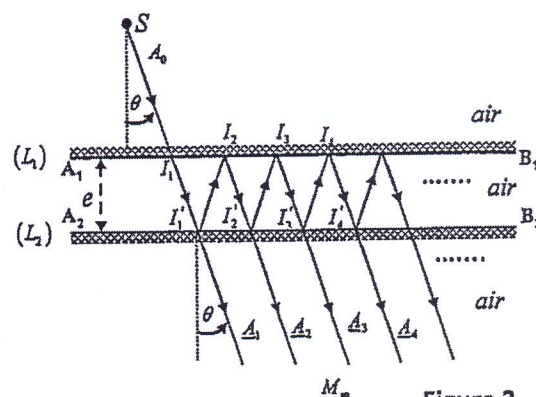


Figure 2

1- De quel type du dispositif interférentiel s'agit-il ?

2- Déterminer la différence de marche $\delta(M_\infty)$ entre deux rayons successifs qui émergent de l'interféromètre. Montrer que le déphasage correspondant s'écrit sous la forme : $\Delta\phi(M_\infty) = \frac{4\pi e \cos \theta}{\lambda}$.

3- Ecrire l'expression de l'amplitude complexe A_1 de la vibration lumineuse relative du premier rayon émergeant en fonction de A_0 et du coefficient de transmission $\mathcal{T}$.

4- Déterminer l'amplitude complexe $\underline{A}_i$ du $i^{\text{ème}}$ rayon émergent, ayant subi $2i$ réflexions entre les deux lames (c-à-d le rayon qui émerge au point I'_i), en fonction de l'amplitude $\underline{A}_{i-1}$ du rayon émergent précédent. En déduire l'expression de $\underline{A}_i$ en fonction de l'amplitude $\underline{A}_0$ du rayon incident et des coefficients de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$.

5- Quelle est la propriété commune de tous les rayons lumineux qui émergent du dispositif? Evaluer l'amplitude complexe de la vibration lumineuse résultante $\underline{A}(M_\infty)$.

6- Le phénomène d'interférences se manifeste à l'infini. Préciser un système optique permettant d'observer la figure d'interférences à une position finie. Dans cette situation, la détection est faite en un point M de l'écran d'observation.

7- Montrer que l'intensité lumineuse en un point M de l'écran s'écrit sous la forme :

$$I(M) = I(\Delta\varphi) = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{\mathcal{T}^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

où $I_{\max}$ est la valeur maximale de l'intensité lumineuse qu'on exprimera en fonction de $\underline{A}_0$ et de $\mathcal{R}$.

8- Qu'observe-t-on sur l'écran lorsqu'on fait varier $\Delta\varphi$ (variation de θ ou e)? Pour quelles valeurs de $\Delta\varphi$, on obtient un phénomène d'interférences constructif (intensité maximale).

9- On fait varier l'écartement e entre les lames tout en maintenant rigoureusement leur parallélisme.

9-1- Déterminer les valeurs particulières e_k de e pour lesquelles l'intensité lumineuse atteint sa valeur maximale.

9-2- Evaluer la largeur à mi-hauteur $\Delta e_{1/2}$ de ces maxima d'intensité dans le cas où $\mathcal{R} \rightarrow 1$.

9-3- Tracer la courbe représentant l'évolution de $I(M)$ en fonction de e .

9-4- On définit la finesse des maxima d'intensité ou de l'interféromètre Fabry-Pérot par : $\mathcal{F} = \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta e_{1/2}}$.

Calculer $\mathcal{F}$ pour $\mathcal{R} = 0,999$.

Problème N° 03 : Physique du Laser

Un faisceau de lumière est décrit par une onde électromagnétique plane progressive harmonique, de pulsation ω se propageant dans le vide suivant la direction Oz . Le champ électrique correspondant est polarisé rectilignement suivant $\vec{e}_x$ et d'amplitude E_0 réel.

1- Donner l'expression du vecteur champ électrique $\vec{E}(M, t)$ puis déterminer celle du champ magnétique associé $\vec{B}(M, t)$.

2- Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{R}(M, t) \rangle$.

3- Préciser pourquoi est impossible de représenter la géométrie du faisceau réel relatif à cette onde lumineuse.

On suppose que l'onde étudiée est limitée dans un tube cylindrique de rayon b . C'est-à-dire que le champ électromagnétique est nul lorsque la distance r entre le point M et l'axe Oz est supérieure à b ($r > b$).

4- Déterminer l'expression de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ transportée par cette onde électromagnétique.

A.N : On donne $b = 0,5 \text{ mm}$ et la puissance de l'onde (Laser) $\langle \mathcal{P} \rangle = 100 \text{ W}$, calculer l'amplitude du champ électrique.

5- A cause de quel phénomène le faisceau contenu dans le tube cylindrique en $z = 0$ ne garde pas le même aspect au cours de la propagation ; il subit une divergence ? Déterminer l'ordre de grandeur de l'angle de divergence du faisceau lumineux.

Pour se rapprocher d'une modélisation réaliste associée à la divergence du faisceau, on propose la forme suivante du champ électrique : $\vec{E}(M, t) = E(M) \exp j(\omega t - kz) \vec{e}_x$,

Où $E(M) = E_0 \exp\left(-\frac{k r^2 z_0}{z^2 + z_0^2}\right)$ est l'amplitude du champ, z_0 est une longueur caractéristique du faisceau, r

est la distance du point M à l'axe Oz et $k = \frac{\omega}{c}$ est le module du vecteur d'onde.

6- Ecrire l'amplitude du champ électrique sous la forme : $E(M) = E(r, z) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2(z)}\right)$,

avec $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$. Donner l'expression de ω_0 et préciser son unité. Représenter l'allure de la variation de l'amplitude $E(M)$ en fonction de r pour z fixé. Cette forme du champ est-elle susceptible de décrire un faisceau Laser réel? L'onde est-elle polarisée?

7- On se plaçant dans le cas où $z \gg z_0$, simplifier l'expression de $\omega(z)$. En déduire que le faisceau Laser a une divergence caractérisée par un angle α qu'en déterminera.

A.N : On donne $z_0 = 2 \text{ m}$ et $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, calculer ω_0 et l'angle α .

Problème N° 04 : Physique quantique (Barrière de potentiel)

On étudie dans cette partie un des effets de la mécanique quantique qui va à l'encontre de la mécanique classique. On considère alors un faisceau d'électrons, non relativistes, de masse m , qui se déplace parallèlement à l'axe (Ox) dans le sens des x croissants, et qui vient heurter en $x = 0$ une barrière d'énergie potentielle de hauteur $V_0 > 0$ et d'épaisseur a définie par :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1- Donner l'exemple d'un système physique qui pourrait être modélisé par la barrière de potentiel $V(x)$.

2- Que peut-on dire du point de vue de la mécanique classique sur la présence de la particule dans la région de l'espace $0 < x < a$?

3- On se place maintenant dans le cadre de la mécanique quantique. On considère une situation physique correspondant à une onde plane associée au flux incident de particules, venant de $x = -\infty$ en direction de la barrière. Lorsqu'elle parvient à la discontinuité de potentiel en $x = 0$, cette onde donne naissance à une onde réfléchie dans la région $x < 0$ et à une onde "évanescence" pénétrant dans la région $0 < x < a$.

À l'interface en $x = a$, l'onde se partage à nouveau, en une onde évanescence réfléchie et en une onde progressive dans le sens des x croissants transmise dans la région $x > a$.

On s'intéresse au problème de franchissement de la barrière par les particules venant de $x = -\infty$ et possédant l'énergie E telle que : $0 < E < V_0$ (effet tunnel).

3-1- Rappeler l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution des particules quantiques. Préciser la forme générale associée aux états stationnaires.

3-2- On note $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ les solutions de l'équation de Schrödinger aux états stationnaires respectivement dans les régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$. Montrer qu'elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 \exp(jkx) + A_1' \exp(-jkx) \\ \varphi_2(x) = A_2 \exp(\gamma x) + A_2' \exp(-\gamma x) \\ \varphi_3(x) = A_3 \exp(jkx) + A_3' \exp(-jkx) \end{cases}$$

Où A_1 , A_1' , A_2 , A_2' , A_3 et A_3' sont des constantes d'intégration. Donner les expressions de k et γ .

3-3- Justifier que pour la situation étudiée, la fonction d'onde dans la région $x > a$ ne comprend qu'un seul terme.

3-4- Écrire les conditions de continuité en $x = 0$ et $x = a$.

3-5- On définit les coefficients de réflexion $\mathcal{R}_p$ et de transmission $\mathcal{T}_p$ en probabilité en présence associé à la

barrière par : $\mathcal{R}_p = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2 = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2(\gamma a)}$ et $\mathcal{T}_p = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2(\gamma a)}$

Comment varie le coefficient de transmission $\mathcal{T}_p$ en fonction de l'énergie E ? Discuter de l'influence des paramètres V_0 et a sur $\mathcal{T}_p$. On pose $X = \frac{E}{V_0}$ et étudier $\mathcal{T}_p(X)$ en fonction de la variable $\mathcal{T}_p$.

3-6- Établir des formules approchées pour le coefficient de transmission $\mathcal{T}_p$ dans le cas où la barrière est mince, puis dans le cas où la barrière est très épaisse. Que devient la transparence d'une barrière quelconque lorsque l'énergie cinétique des particules incidentes tend vers V_0 . Comparer ces résultats à ceux de la mécanique classique.

3-7- Dans la limite $\gamma a \gg 1$, étudier le comportement du coefficient de transmission $\mathcal{T}_p$ en fonction de a, m et la quantité $V_0 - E$.

A.N : La hauteur de la barrière de potentiel est $V_0 = 2 \text{ eV}$ et sa largeur est $a = 1 \text{ nm}$. Calculer le coefficient de transmission de la barrière $\mathcal{T}_p(e^-)$ pour un électron d'énergie $E = 1 \text{ eV}$, puis celui d'un proton $\mathcal{T}_p(p)$ dont énergie est la même.

Comparer les deux résultats et conclure. L'hypothèse $\gamma a \gg 1$ est-elle satisfaite ?

3-8- Déterminer le courant de probabilité dans chacune des régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$. Retrouver le fait que $\mathcal{R}_p + \mathcal{T}_p = 1$. Quel est le sens physique de cette équation ?

4- Comment est modifiée la fonction d'onde dans chacune des régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$ dans le cas où la particule venant de $x = -\infty$ en direction de la barrière a une énergie E telle que $E > V_0$?

Fin de l'épreuve