

Devoir de contrôle d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : P.T.2 et P.C.2

Durée : 1h15mn

Date : 27 Janvier 2021

Nombre de pages : 2

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et par I_n la matrice identité.

On note par tr l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace.

1. Montrer que l'application tr est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\text{Im}(tr)$ et $\dim(\ker tr)$.
3. Montrer que : $\text{Vect}(I_n) \oplus \ker tr = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \Psi_J : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M + tr(M)J \end{aligned}$$

- (a) Dans le cas où $J = I_n$, déterminer les valeurs propres de Ψ_{I_n} .
 Ψ_{I_n} est-il diagonalisable ?
- (b) Dans le cas où $J \neq I_n$, quelles sont les valeurs propres de Ψ_J ?
 Ψ_J est-il diagonalisable ? (discuter suivant $tr(J)$.)

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Soit f l'application définie sur E par :

$$f(P) = X(X+1)P'' + (aX-1)P',$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Dans cette question, on prend $n = 3$, $a = -4$ et l'endomorphisme

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto g(P) = X(X+1)P'' + (-4X-1)P'. \end{aligned}$$

- (a) Ecrire la matrice M associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de g .
- (c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

3. Etude du cas général :

- (a) Ecrire la matrice M_a associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Déterminer $sp(f)$, le spectre de f .
- (c) Montrer que : si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors toutes les valeurs propres sont deux à deux distinctes puis déduire que f est diagonalisable.