

Devoir de Fin de Semestre de Physique N° 01
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- Les deux parties A et B seront rédigées sur des feuilles de composition séparées, et rendues également séparées à la fin de l'épreuve.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

PARTIE A : Physique des Ondes

I- Onde Electromagnétique

Données utiles :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}(\vec{A}) - \Delta \vec{A} ; \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos(x) \sin(x) dx = 0.$$

1- Ecrire les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants et donner la signification physique de chacune.

2- En déduire l'équation satisfaite par le champ électrique. Qu'appelle-t-on cette équation ?

3- Que représente le terme $\epsilon_0 \mu_0$ qui apparaît dans l'équation obtenue ?

On considère deux vecteurs champs électriques, exprimés dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}_1(x,t) = E_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \vec{u}_y, \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(x,t) = E_2 \left(t + \frac{x}{c} \right) \vec{u}_y.$$

4- Vérifier que ces deux vecteurs constituent des solutions de l'équation obtenue à la question 1-2/. Donner leurs caractéristiques.

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i$ se propage dans le vide le long de l'axe (Ox) dans le sens des x croissants. Le champ électrique associé, s'écrit : $\vec{E}_i(M,t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_i \vec{r}) \vec{u}_y$, avec l'amplitude E_0 et la norme k_i du vecteur d'onde sont constantes.

5- Expliciter les expressions du vecteur d'onde $\vec{k}_i$ et du champ électrique $\vec{E}_i$.

6- Préciser la nature de polarisation de cette onde électromagnétique.

7- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_i(M,t)$ associé.

8- Donner l'expression du vecteur de Poynting associé $\vec{R}_i(M,t)$. En déduire la valeur moyenne de la puissance électromagnétique à travers une surface S , perpendiculaire à la direction de propagation.

Application : Une source Laser produit un faisceau de lumière, de longueur d'onde $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$. La puissance moyenne par ce faisceau est : $\langle \mathcal{P} \rangle = 1 \text{ mW}$. Le diamètre du faisceau est $D = 2 \text{ mm}$.

Quelle est l'amplitude E_0 du vecteur champ électrique associé à l'onde plane qui transporte le faisceau ?

En arrivant au plan $x=0$, l'onde électromagnétique rencontre un miroir métallique parfait de telle sorte que l'onde subit une réflexion totale qui obéit aux lois de Descartes. Il se produit alors une onde électromagnétique réfléchie se propageant le long de l'axe (Ox) suivant les x décroissants (voir figure-1). On admet que le champ électrique $\vec{E}_r$ associée s'écrit sous la forme : $\vec{E}_r(M,t) = -E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}_y$.

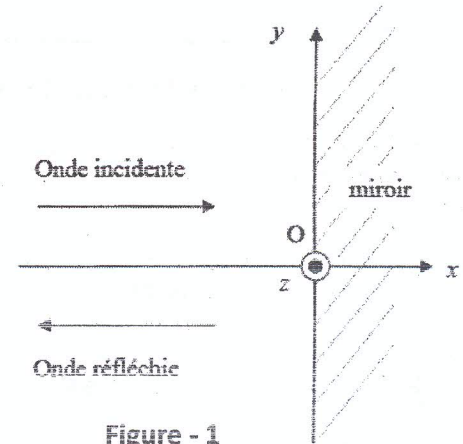


Figure - 1

9- Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}_r$ de l'onde réfléchie et expliciter l'expression du champ électrique $\vec{E}_r(M,t)$.

10- Déterminer l'expression du champ électrique équivalent $\vec{E}(M,t)$ associée à la superposition des ondes électromagnétiques incidente et réfléchie qui règne dans le demi-espace $x < 0$.

11- Déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ associée.

12- Quelles sont les caractéristiques de l'onde électromagnétique résultante ?

13- Déterminer la densité de flux associée et évaluer la puissance moyenne de l'onde résultante. Interpréter

14- Déterminer les positions des plans nodaux associés au champ électrique $\vec{E}(M,t)$ (plans où l'amplitude du champ électrique est nulle). Faire une figure représentant le vecteur champ électrique pour différentes positions à un instant t donné.

II- Onde mécanique le long d'une corde

Les cordes des instruments de musique sont des objets métalliques cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L . Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

A - Equation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique μ est tendue sous la tension de module T_0 . Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox) .

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant (voir figure-2).

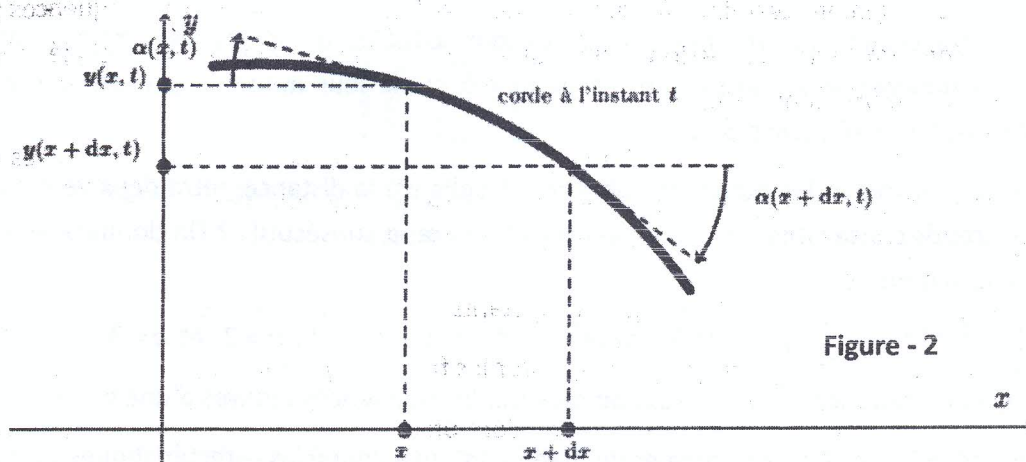


Figure - 2

On note $T(x, t)$ la norme de la tension en tout point de la corde en mouvement et on impose les hypothèses suivantes :

On se limite aux petits déplacements de la corde et de même l'angle que fait la corde en mouvement avec

l'axe (Ox) est faible, ce qui entraîne : $\left| \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right| \ll 1$; ces déplacements transversaux sont tellement petits

que la tension de la corde en mouvement est : $T(x, t) = T_0 + T_1(x, t)$ avec $|T_1(x, t)| \ll T_0$ et $\frac{|T_1(x, t)|}{T_0}$ est

infinitement petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$. Pour la même raison, on ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x, t)$ et en ses dérivées. On néglige les effets de la pesanteur.

La corde est inextensible et parfaitement flexible (sans raideur).

1- On considère l'élément de corde de longueur $d\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x+dx$ à l'équilibre. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement à cet élément de la corde, déduire

que l'ébranlement $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles (1) : $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$ où v est

une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ .

2- Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation (1).

3- Calculer la grandeur v pour :

Une corde de guitare : de masse linéique $\mu = 3 \text{ g m}^{-1}$ et de tension $T_0 = 103 \text{ N}$;

Une corde de piano : de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$, de tension $T_0 = 850 \text{ N}$ et de diamètre $d = 1,2 \text{ mm}$.

B - Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$.

4- On cherche des solutions de l'équation (1) sous la forme : $y(x, t) = y_0 \cos(kx - \varphi) \cos(\omega t - \varphi')$,

Avec ω et k deux constantes positives. Quelle est la relation entre ω et k ?

4-1- Montrer que seulement certaines fréquences sont possibles, qu'on appellera fréquences propres de la corde. On en donnera leurs expressions, ainsi que celle de leur mode propre associé, c'est à dire de l'élongation pour une fréquence propre.

4-2- Définir les ventres et les nœuds de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? Entre deux nœuds consécutifs ? Entre un ventre et un nœud consécutifs ? On donnera le résultat à l'aide de la longueur d'onde λ .

4-3- Représenter l'aspect de la corde à différents instants pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

4-4- Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

4-5- On considère les cordes de guitare et de piano dont on a donné les caractéristiques précédemment. La corde de guitare permet de créer une note de fréquence fondamentale (la fréquence la plus basse des fréquences propres de la corde) $f=147\text{ Hz}$ (pour les musiciens, cette note est un Ré). Quelle est la longueur du fil métallique de la guitare ? Quelle est la longueur de la corde de piano produisant la même note ?

III- Ondes acoustiques

On donne :

Formule d'analyse vectorielle : $\text{div}(f\vec{A}) = f\text{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \text{grad } f$,

Constantes des gaz parfaits : $R = 8,314\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$,

Masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 28,8\text{ g mol}^{-1}$,

Rapport des capacités calorifiques isobare et isochore de l'air : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$.

Les vibrations de la corde de l'instrument se transmettent à l'air.

1- On s'intéresse donc à la propagation unidimensionnelle (selon (Ox)) d'ondes sonores dans un fluide. Un fluide, supposé parfait et soumis aux seules forces de pression, est caractérisé à l'équilibre par des valeurs uniformes P_0 de la pression et ρ_0 de la masse volumique. Du point de vue thermodynamique, ses évolutions sont considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité χ_s . Le passage d'une onde sonore crée une perturbation et le fluide effectue de petits mouvements par rapport à l'état d'équilibre, les champs de pression et de masse volumique devenant : $p(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$ et $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ et le champ de vitesses $\vec{v}(x,t)$.

1-1- Qu'appelle-t-on approximation acoustique ? Écrire et linéariser les équations locales de la mécanique des fluides et l'équation traduisant l'hypothèse thermodynamique effectuée. Etablir l'équation de propagation des ondes acoustiques pour la surpression. En déduire l'expression de la célérité c de ces ondes.

1-2- Dans le modèle du gaz parfait, établir la loi de variation de la célérité avec la température. Calculer c dans l'air à la température de $T = 290\text{ K}$.

La célérité des ondes acoustiques dans l'eau est de l'ordre de $c_{\text{eau}} \approx 1500\text{ m s}^{-1}$. Qu'est ce qui peut expliquer cette différence par rapport à celle trouvée dans l'air ?

1-3- À partir des équations précédentes, établir l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2(x,t) + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2(x,t) \right) + \text{div} (p_1(x,t) \vec{v}(x,t)) = 0.$$

Donner la signification physique de cette équation : identifier et interpréter chacun de ses termes.

2-On considère une onde sonore plane progressive monochromatique de pulsation ω dont la surpression acoustique associée, en notation complexe, est : $\underline{p}_1(x,t) = p_{01} \exp j(\omega t - kx)$.

On définit l'impédance acoustique liée à une telle onde comme le quotient : $Z_a = \frac{p_1(x,t)}{v(x,t)}$.

2-1- Dans un fluide illimité, montrer que cette impédance ne dépend que des caractéristiques du fluide et l'exprimer en fonction de la masse volumique ρ_0 et de la célérité c . Calculer Z_a pour l'air et pour l'eau dans les conditions des questions précédentes.

2-2-Exprimer l'intensité sonore $I = \langle \vec{R} \rangle$ de cette onde en fonction de p_{01} et Z_a .

2-3- Calculer les amplitudes de la surpression et de la vitesse du fluide dans le cas d'une telle onde sonore au seuil d'audition puis au seuil de la douleur. Conclure sur la validité de l'approximation acoustique.

On donne :

- L'intensité sonore du seuil de l'audible est : $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$,
- L'intensité sonore de la douleur est ; $I_D = 10 \text{ W m}^{-2}$.

PARTIE B : Mécanique des fluides

Le phénomène de cavitation dans une région d'une conduite consiste à une zone où la pression P est inférieure ou à la limite égale à la pression P_{vs} de la vapeur saturante du fluide à la température T de l'écoulement (P_{vs} est très faible par rapport à la pression atmosphérique P_0).

On permet l'écoulement de l'eau de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ contenue dans un réservoir de section libre constante S , par l'intermédiaire d'un siphon BCDE qui consiste à un tube cylindrique de section constante $s \ll S$ de diamètre $d = 8 \text{ cm}$ (figure 3). L'extrémité E du tube débouche à l'air libre à une distance $Z = 7,2 \text{ m}$ sous le niveau de la surface libre de l'eau. Dans tout le problème l'écoulement de l'eau est considérée comme parfait, permanent et incompressible. On donne $P_0 = 102 \text{ kPa}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

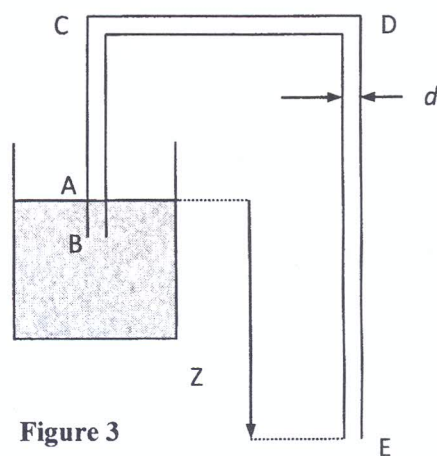


Figure 3

1- Rappeler l'équation d'Euler en explicitant ces différents termes.

2- Établir le théorème de Bernoulli pour cet écoulement. Donner son interprétation énergétique.

3- En écrivant la conservation du débit volumique, montrer qu'on peut négliger la vitesse d'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir par rapport à la vitesse d'écoulement dans le siphon.

4- Établir la loi de vidange (formule de Torricelli) pour ce réservoir ouvert. Conclure.

- 5- Calculer le débit volumique de ce siphon.
- 6- Sachant que la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'écoulement est $P_{vs}=20 \text{ kPa}$, à quelle hauteur au-dessus de la surface libre dans le réservoir, devrait se situer le point le plus haut du siphon pour que, en ce lieu se produise la cavitation ?
- 7- Le réservoir est maintenant fermé, de l'air (assimilé à un gaz parfait) à la pression atmosphérique est emprisonné dans la chambre de ce réservoir, l'espace libre a ainsi une hauteur h (figure 4). En prenant comme référence l'horizontale qui passe par la sortie E du tube, on appelle Z la cote initiale de la surface libre de l'eau dans le réservoir. La pression atmosphérique correspond à une hauteur d'eau $H = P_0/\rho g$.

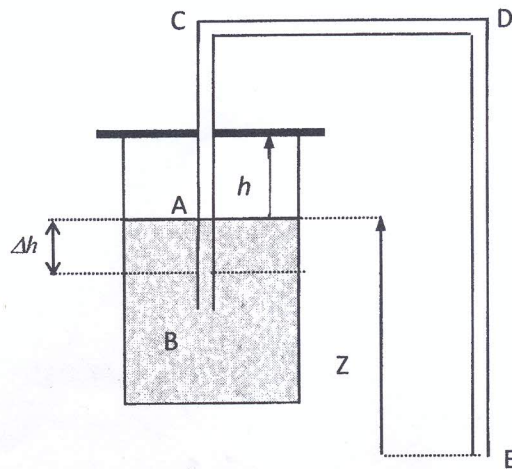


Figure 2

- 7.1- En supposant que le siphon est amorcé pour permettre l'écoulement et en négligeant la vitesse d'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir par rapport à la vitesse d'écoulement dans le siphon, établir la loi de vidange (formule de Torricelli) pour ce réservoir fermé.
 - a- Déterminer la pression de l'air emprisonné dans la chambre du réservoir lorsque l'écoulement cessera. Expliquer pourquoi l'écoulement cesse.
 - b- Déterminer cette même pression à partir de considérations thermodynamiques.
 - c- En déduire l'équation en second degré en Δh . Δh étant l'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir lorsque l'écoulement cessera.
 - d- Exprimer Δh en fonction de H , Z et h .
 - e- Application numérique: Calculer Δh pour $H=10 \text{ m}$, $Z=3 \text{ m}$ et $h=20 \text{ cm}$.
- 7.2- Le réservoir étant fermé avec les conditions initiales H , Z et h et on note que la température de l'air, à la pression atmosphérique dans la chambre au-dessus de l'eau est $\theta_0 = 16^\circ\text{C}$. Le tube du siphon est plein d'eau, mais un robinet fermé à la sortie E l'empêche de fonctionner. Quelques jours plus tard, on observe que la température de l'air dans la chambre du réservoir est $\theta = 22^\circ\text{C}$, on ouvre alors la vanne.

Donner l'abaissement Δh du niveau de l'eau dans le réservoir lorsque l'écoulement cessera.

- a- Exprimer le résultat en fonction de H , Z , h , T_0 et T les températures absolues correspondantes à θ_0 et θ .
- b- Application numérique : Calculer Δh pour $H=10 \text{ m}$, $Z=3 \text{ m}$ et $h=20 \text{ cm}$.