

Examen Final d'Algèbre

Durée : 2H

Date : 31 mai 2021

Nombre de pages : 3

Exercice

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction f par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2. Calculer les
 - (a) dérivées premières de f en fonctions de celle de h .
 - (b) dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ de f en fonctions de h' et h'' .
3. Montrer que f est solution sur U de l'équation aux dérivées partielles

$$(E_1) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x}{y^3}$$

si et seulement si h vérifie sur $]0, 1[$ l'équation différentielle

$$(E) : (1 + t^2)y'' + 2ty' = t$$

4. Résoudre l'équation différentielle (E) . Indication : poser $z(t) = (1 + t^2)y'(t)$
5. Résoudre alors l'équation aux dérivées partielles (E_1) .

Problème

Dans tout le problème, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Son sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égal à n , ($n \in \mathbb{N}$), sera noté E_n .

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

On désigne par Φ l'application de E dans lui même définie par :

$$\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP' = ((X^2 - 1)P')'.$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on désigne par $V_{p,q} = ((X^2 - 1)^p)^{(q)}$ le polynôme dérivée $q^{\text{ème}}$ de $(X^2 - 1)^p$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = V_{k,k}$ et $L_k = \frac{1}{2^k k!} U_k$.

1^{ère} Partie :

1. Montrer que Φ est linéaire et induit un endomorphisme Φ_n de E_n .
2. Écrire la matrice de Φ_n dans la base canonique $\mathfrak{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E_n .
3. Déterminer les valeurs propres de Φ_n et en déduire qu'elle est diagonalisable.
4. On note $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n$ les valeurs propres de Φ_n .
 - (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que

$$\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k.$$

- (b) Montrer que P_k est de degré k .
5. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur E . On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
 6. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q)).$$

7. En déduire que, pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a

$$(P_k|P_{k'}) = 0.$$

8. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n . Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $R_k = \frac{1}{\|P_k\|} P_k$.
 - (b) i. Soit $P = \sum_{k=1}^n a_k R_k$ tel que $\|P\| = 1$, montrer que $\|\Phi_n(P)\|^2 = \sum a_k^2 \mu_k^2$
 - ii. Calculer alors $\|\Phi_n\| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\}$.
 - (c) Exprimer $\inf\left\{\int_{-1}^1 P(t)t dt; P \in E_2\right\}$ en fonction de R_0, R_1 et R_2 .

2^{ème} Partie :

1. (a) Quel est le degré du polynôme L_k ? Donner son coefficient dominant.
 - (b) Soit $k \in \mathbb{N}$; en partant du fait que $(X^2 - 1)^k = (X - 1)^k(X + 1)^k$ et moyennant la formule de Leibniz, calculer $L_k(1)$.
 - (c) Préciser la parité du polynôme L_k en fonction de celle de k .
 - (d) En déduire la valeur de $L_k(-1)$.
2. (a) Montrer que si $p > q$ alors $V_{p,q}(1) = V_{p,q}(-1) = 0$.
 - (b) Si $q > 2p$, montrer que $V_{p,q} = 0$.
 - (c) En effectuant une succession d'intégrations par partie montrer que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q \implies (U_p|U_q) = 0.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, L_1, \dots, L_k)$ est une base orthogonale de E_k .

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $(XL_n | L_k) = 0$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, il existe $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n) L_n + \gamma_n L_{n-1}.$$

ind. On pourra écrire XL_n dans la base $(L_0, \dots, L_{n+1})$.

5. (a) On pose $W_k = (X^2 - 1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)W'_n = 2nXW_n.$$

(b) En dérivant $(n + 1)$ -fois l'expression précédente, montrer que

$$\Phi_n(L_n) = n(n + 1)L_n.$$

(c) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, puis calculer a_n .

6. (a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (X | L_k L'_k) = 1 - \frac{1}{2} \|L_k\|^2.$$

(b) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (XL'_k | L_k) = k \|L_k\|^2.$$

On remarquera que si $k \geq 1$, $XL'_k - kL_k \in E_{k-1}$.

(c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|L_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$.

(d) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (k + 1)L_{k+1} = (2k + 1)XL_k - kL_{k-1}.$$