

Devoir du Fin de Semestre de Physique N° 02
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- Les deux parties A et B seront rédigées sur des feuilles de composition séparées, et rendues également séparées à la fin de l'épreuve.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- La feuille représentant le diagramme thermodynamique (log P, h) doit être remise avec la copie

PARTIE A : Thermodynamique (Étude d'une turbine)

Dans une turbine, un fluide passe des conditions (pression P_1 , température T_1 , vitesse v_1 , enthalpie massique h_1) à l'entrée aux conditions (pression P_2 , température T_2 , vitesse v_2 , enthalpie massique h_2) à la sortie (Figure 1).

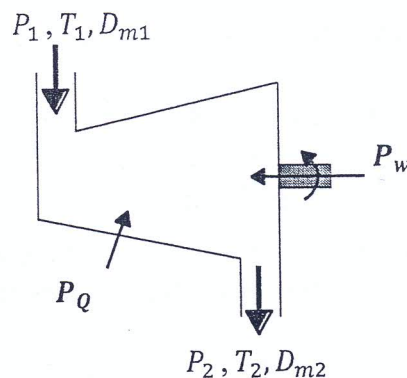


Figure 1

Dans la turbine, le fluide reçoit **algébriquement** de l'extérieur une puissance mécanique P_w (cette puissance mécanique n'inclut pas la puissance des forces de pression au niveau des surfaces d'entrée et de sortie) et une puissance thermique P_Q .

On néglige toute variation d'énergie potentielle gravitationnelle et on se place en régime permanent.

1- Montrer que les débits massiques entrant D_{m1} et sortant D_{m2} (masse de fluide entrant ou sortant par unité de temps) sont égaux. On pose : $D_{m1} = D_{m2} = D_m$

2- Montrer que l'application du premier principe à une quantité de fluide que l'on définira de manière précise, conduit à : $D_m \left\{ \left(h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) \right\} = P_w + P_Q$

3 - Application numérique : une **turbine à vapeur** fonctionne dans les conditions suivantes

Entrée : $P_1 = 60 \text{ bar}$; $T_1 = 713 \text{ K}$; $v_1 = 160 \text{ m.s}^{-1}$; $h_1 = 3277,2 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Sortie : $P_2 = 0.95 \text{ bar}$; $v_2 = 80 \text{ m.s}^{-1}$; $h_2 = 2673,2 \text{ kJ.kg}^{-1}$

3.1- Représenter les deux points de fonctionnement $A_1 : (P_1, h_1)$ de l'entrée et $A_2 : (P_2, h_2)$ de la sortie et la transformation $A_1 \longrightarrow A_2$ sur le diagramme (P, h) ci-joint (à rendre avec la copie). Vérifier la valeur de T_1 sur le diagramme et en déduire la valeur de la température T_2 . Interpréter la transformation thermodynamique $A_1 \longrightarrow A_2$.

Pour un débit massique $D_m = 20 \text{ kg.s}^{-1}$, la turbine fournit une puissance mécanique de $P_w = 11,5 \cdot 10^6 \text{ W}$

3.2- Calculer la puissance thermique P_Q et préciser le sens de ce transfert thermique.

3.3- Calculer le rapport $\left| \frac{P_Q}{P_w} \right|$. Commentaire.

3.4- Calculer le rapport $\left| \frac{\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)}{h_2 - h_1} \right|$. Commentaire.

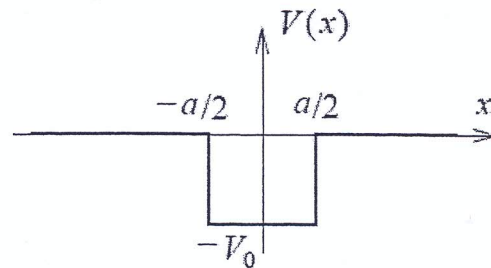
PARTIE B : Mécanique Quantique & Interférences

Problème N° 01

I. Etats liés - Quantification de l'énergie.

On considère une particule plongée dans un potentiel $V(x)$ en forme de puits carré, défini par :

$V(x) = -V_0 < 0$ pour $-\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2}$ et $V(x) = 0$ ailleurs.



1- Quel est le mouvement d'une particule dans ce potentiel en mécanique classique ?

2- On étudie le cas $-V_0 < E < 0$ (états liés).

2-a- Ecrire l'équation de Schrödinger et la résoudre séparément dans chacune des trois zones.

On pourra poser : $k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$, $k = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $K = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$.

2-b- On peut montrer que, dans le cas d'une discontinuité de potentiel finie, les fonctions d'ondes restent bornées, continues et de dérivée continue. Ecrire les relations qui en découlent et en déduire que :

$$\left(\frac{k - iK}{k + iK} \right) = \exp(i2Ka).$$

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions, pour une valeur donnée de l'énergie ?

2-c- On peut montrer que l'équation précédente est équivalente au système :

$$\sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{K}{k_0}, \text{ lorsque } \operatorname{tg}\left(\frac{Ka}{2}\right) < 0,$$

$$\cos\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{K}{k_0}, \text{ lorsque } \operatorname{tg}\left(\frac{Ka}{2}\right) > 0.$$

Montrer par une méthode graphique simple qu'il y a une quantification des énergies. Que se passe-t-il lorsque le puits devient très profond ?

II. Etats libres - Courant de probabilité – Réflexion, transmission

3- Dans le cas du puits carré précédent, on étudie maintenant le cas $E > 0$ (états libres).

3-a- Résoudre l'équation de Schrödinger dans chacune des trois zones et écrire les relations de raccordement.

3-b- Montrer que pour toute énergie E , les solutions forment un espace vectoriel de dimension deux.

Montrer que toute solution peut se décomposer en deux ondes planes qui se propagent en sens contraire. Peut-on normer ces solutions ?

4- On considère une particule quantique de masse m placée dans un potentiel $V(M)$ et décrite par la fonction d'onde $\psi(M, t)$.

On définit la densité de probabilité de présence de la particule à une position M et à l'instant t par :

$$\rho(M,t) = \psi(M,t) \psi^*(M,t) = |\psi(M,t)|^2.$$

4-a- Montrer que cette densité satisfait à l'équation de conservation : $\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(M,t) = 0$

Où le vecteur densité de courant de probabilité $\vec{J}(M,t)$ est donné par :

$$\vec{J}(M,t) = \frac{\hbar}{2im} \left[\psi^*(M,t) (\vec{\nabla} \psi(M,t)) - (\vec{\nabla} \psi^*(M,t)) \psi(M,t) \right].$$

4-b- Donner $\vec{J}(M,t)$ pour une fonction d'onde de la forme : $\psi(M,t) = A \exp(i f(M,t))$.

4-c- Préciser $\vec{J}(M,t)$ dans le cas d'une onde plane, $f(M,t) = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t$.

5- On considère une particule de masse m , soumise au potentiel à une dimension suivant :

$$V(x) = -V_0 < 0 \text{ avec } V_0 > 0 \text{ pour } x < 0 \text{ et } V(x) = 0 \text{ pour } x > 0.$$

On s'intéresse dorénavant aux états stationnaires d'énergie positive, représentant une onde se propageant depuis $x \rightarrow +\infty$ vers les x décroissants, partiellement réfléchi en $x = 0$ et partiellement transmise.

5-a- Expliquer brièvement pourquoi on choisira les fonctions d'onde sous la forme :

$$\varphi(x) = A' \exp(-iKx) \text{ pour } x < 0$$

$$\varphi(x) = A \exp(-ikx) + B \exp(ikx) \text{ pour } x > 0.$$

$$\text{où } K = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \text{ et } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

5-b- Ecrire les conditions de raccordement en $x = 0$, et évaluer A' et B en fonction de A , K et k .

5-c- Déterminer le courant pour $x < 0$ puis $x > 0$. Identifier les courants de probabilité incident $\vec{J}_i(x,t)$, réfléchi $\vec{J}_r(x,t)$ et transmis $\vec{J}_t(x,t)$.

5-d- On définit un coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ en probabilité de présence par :

$$\mathcal{R} = \left| \frac{\vec{J}_r(x,t)}{\vec{J}_i(x,t)} \right| \text{ et } \mathcal{T} = \left| \frac{\vec{J}_t(x,t)}{\vec{J}_i(x,t)} \right|.$$

Vérifier que : $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$. Commenter.

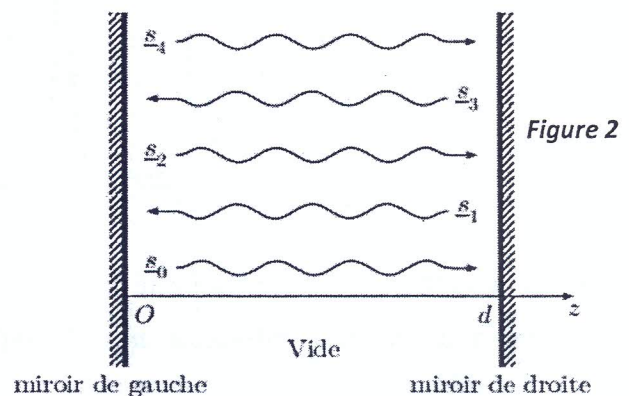
5-e- Calculer la limite de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{T}$ pour k très faible ($k \rightarrow 0$) et pour k très grand ($k \rightarrow +\infty$). Comparer avec les résultats de la mécanique classique.

Problème N° 02

La cavité micro-onde est constituée de deux miroirs métalliques mis en regard entre lesquels des photons de longueur d'onde λ_0 sont piégés. Dans un premier temps, on s'intéresse aux propriétés d'une cavité composée de miroirs métalliques plans (Partie I) puis d'aborder le cas des miroirs sphériques (Partie II).

Partie I : Miroirs Plans

On considère une cavité constituée de deux miroirs plans métalliques (figure 2) séparés par le vide d'une distance $d = 26,6 \text{ mm}$. On note r_M le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique. Il est identique pour les deux miroirs. Ce coefficient r_M est négatif pour la longueur d'onde λ_0 utilisée : $-1 < r_M < 0$ et $1 - |r_M| \ll 1$.



On se place dans l'approximation scalaire. L'intensité I est définie par :

$I(P) = I(z) = \frac{1}{2} K \underline{s}(z, t) \underline{s}^*(z, t)$, où $\underline{s}(z, t)$ est l'amplitude instantanée de la vibration scalaire complexe.

Une onde primaire, de vibration scalaire $\underline{s}_0(z, t) = S_0 \exp j(\omega t - kz)$ tel que $S_0 > 0$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, se propage dans la cavité suivant les z croissants et provenant du miroir gauche. Sous l'effet des conditions imposées aux positions $z = 0$ et $z = d$, elle subit des réflexions multiples dans la cavité. On note $\underline{s}_1(z, t)$ la vibration associée à l'onde réfléchie sur le miroir droite, $\underline{s}_2(z, t)$ la vibration associée à l'onde réfléchie sur le miroir gauche et d'une manière générale $\underline{s}_n(z, t)$ la vibration associée à l'onde ayant subi n réflexions sur les miroirs.

1- On se place en un point P d'abscisse z à l'intérieure de la cavité. Exprimer la vibration $\underline{s}_1(z, t)$ en fonction de $\underline{s}_0(z, t)$.

2- Exprimer de même $\underline{s}_2(z, t)$ en fonction de $\underline{s}_0(z, t)$ ainsi que $\underline{s}_3(z, t)$ en fonction de $\underline{s}_1(z, t)$. On fera intervenir le déphasage $\varphi = \frac{4\pi d}{\lambda_0}$.

3- Quelle est le prétexte qui a permis de réaliser une somme algébrique des différentes vibrations lumineuses ?

Simplifier alors la somme algébrique des vibrations scalaires associées aux ondes se propageants dans le sens des z croissants : $\underline{s}_+(z, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underline{s}_{2p}(z, t)$. Réaliser une somme analogue pour les vibrations décrivant

les ondes qui se propagent suivant les z décroissants : $\underline{s}_-(z, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underline{s}_{2p+1}(z, t)$.

On admet que l'intensité résultante varie en fonction du déphasage $\varphi = \frac{4\pi d}{\lambda_0}$ selon l'expression :

$$I(\varphi) = \frac{I_M}{1 + M \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \text{ avec } M = \frac{4R}{(1-R)^2} \text{ où } R = r_M^2.$$

Les variations de $I(\varphi)$ sont représentées sur la figure 3.

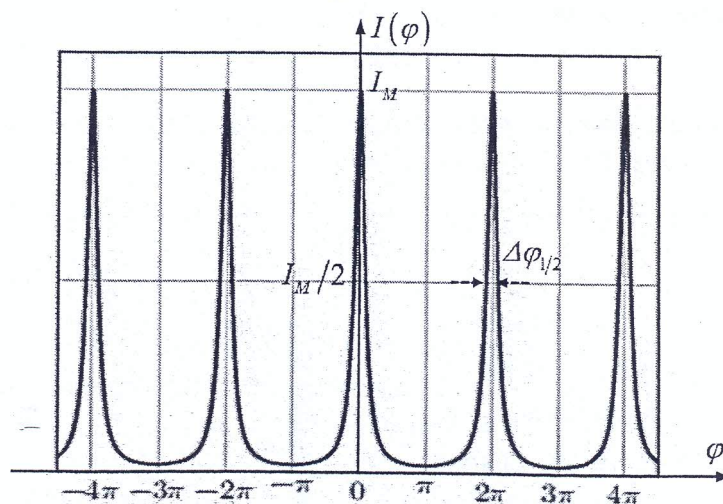


Figure 3

4- Pour quelles fréquences f_{cav} cette intensité est maximale ?

5- On s'intéresse à la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi_{1/2}$ des pics où l'intensité $I(\varphi)$ est maximale, définie par :

$$I(\Delta\varphi_{1/2}) = \frac{1}{2} I_M.$$

Dans l'hypothèse où $1 - R \ll 1$, donner l'expression de $\Delta\varphi_{1/2}$ en fonction de $M = \frac{4R}{(1-R)^2}$. En déduire la

largeur en fréquence $\Delta f_{1/2}$ des pics de résonance de la cavité.

6- Associer à cette largeur de fréquence une durée typique τ de l'onde dans la cavité en fonction de c , d et R , toujours dans l'hypothèse où on a : $1 - R \ll 1$.

On cherche à retrouver l'ordre de grandeur de cette durée τ en adoptant un point de vue corpusculaire. A chaque réflexion, la probabilité que le photon franchisse le miroir et sorte de la cavité est : $T = 1 - R$.

7- Déterminer la durée de vie moyenne d'un photon dans la cavité en fonction de c , d et R .

8- Quelle est la valeur que doit prendre la quantité $T = 1 - R$ pour avoir une durée de vie du photon $\tau = 100 \text{ ms}$? Commenter.

9- En pratique, on recouvre les miroirs d'un supraconducteur de résistance électrique nulle. Quelle est la raison ?

Partie II : Miroirs Sphériques

En réalité, les miroirs plans ont une dimension finie. On considère la situation où ils sont constitués par des disques de rayon $a = 25 \text{ mm}$ (figure 4). L'onde électromagnétique parvenant sur un miroir (ici le miroir droite) est ainsi diffractée. Une partie de l'onde diffractée n'est pas captée par le miroir en vis-à-vis (ici le miroir gauche).

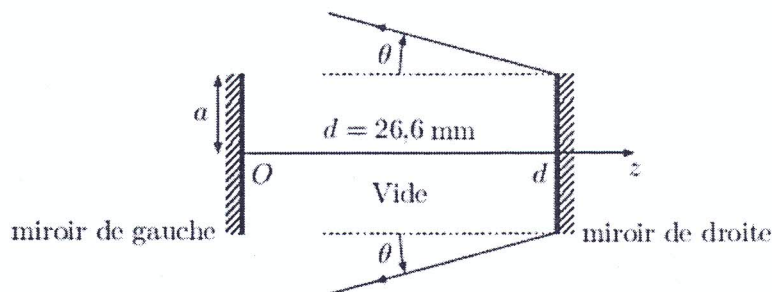


Figure 4 : Effet de la diffraction sur le miroir droite

10- Estimer la durée τ_{diff} au bout de laquelle l'intensité restant dans la cavité est divisée par le facteur 1000 par rapport à l'intensité initiale pour les photons de fréquence $f = 51,1 \text{ GHz}$. Commenter ce résultat.

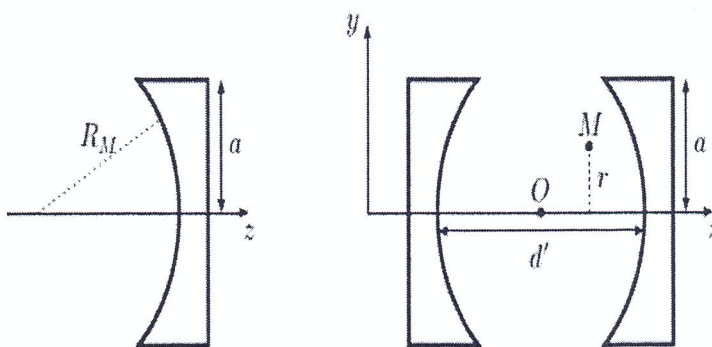


Figure 5 : Schémas d'un miroir sphérique et de la cavité

Afin de palier le problème lié à la diffraction, on utilise des miroirs sphériques (portion d'une sphère), de rayon de courbure $R_M = 40 \text{ mm}$. Le rayon des miroirs est toujours $a = 25 \text{ mm}$, mais la distance entre eux est désormais $d' = 27,6 \text{ mm}$. La cavité est représentée sur la figure 5. On utilise le système de coordonnées cylindriques avec origine de repère au centre de la cavité et l'axe (Oz) coïncide avec son axe de révolution. L'intérieur de la cavité est constitué du vide. On admet que la diffraction est ainsi limitée et on s'intéresse à l'étude de l'onde électromagnétique dans la cavité.

Pour une longueur d'onde λ_0 , il s'établit dans la cavité une onde électromagnétique stationnaire dont la vibration complexe associée est de la forme :

$$\underline{s}(P,t) = \underline{s}(z,t) = S_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2(z)}\right) \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi z}{\lambda_0} - \arctg\left(\frac{\lambda_0 z}{\pi \omega_0^2}\right) + \frac{\pi r^2}{\lambda_0 R_g(z)} + \alpha}_{=\Phi(r,z)}\right) \exp(j\omega t),$$

Où $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0 z}{\pi \omega_0^2}\right)^2}$ est le rayon typique du faisceau à un niveau d'abscisse z dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) , ω_0 est une constante, appelée col du faisceau (waist en anglais), $R_g(z)$ est le

rayon de la courbure des surfaces d'onde : $R_g(z) = z + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda_0}\right)^2$ et α est une phase constante. On

admet que $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi} \sqrt{\frac{d'}{2} \left(R_M - \frac{d'}{2}\right)}}$.

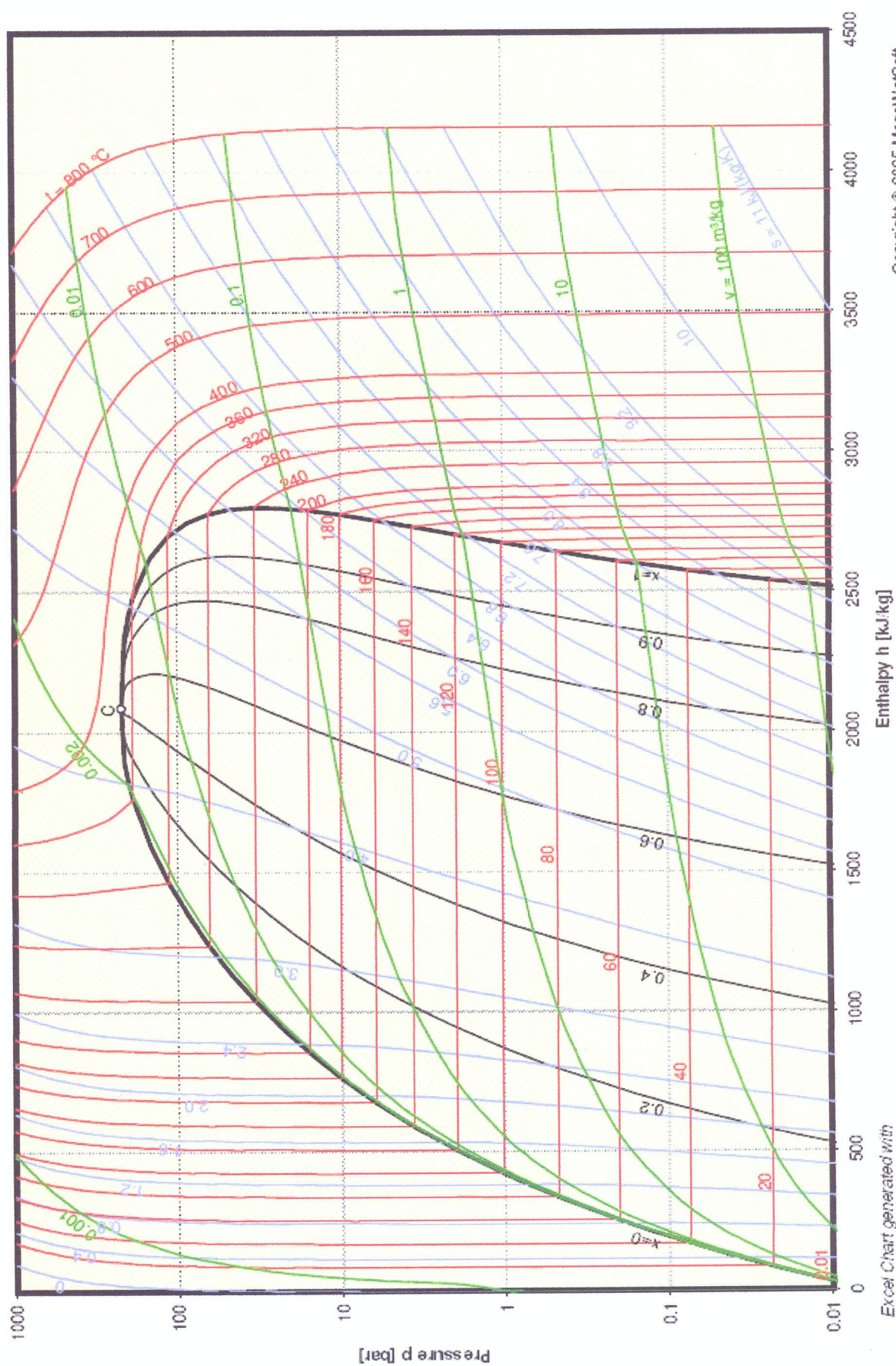
11- Calculer ω_0 pour une fréquence $f = 51,1 \text{ GHz}$.

12- Au niveau de l'axe (Oz) c-à-d ($r = 0$), on souhaite que structure de l'onde stationnaire présente un nœud au niveau de chaque miroir et p ventres avec, en particulier, un ventre à l'origine O . En déduire, en fonction de l'entier p , la variation en valeur absolue de la quantité $\Phi(r=0, z)$ entre $z = 0$ et $z = \frac{d'}{2}$. Que vaut p pour la fréquence de l'onde $f = 51,1 \text{ GHz}$?

En faisant l'analogie avec la corde vibrante de Melde, estimer l'ordre de grandeur de la taille d'un fuseau. Faire l'application numérique et commenter sachant que le jet atomique traversant la cavité en son centre est de diamètre $0,7 \text{ mm}$.

Bonne chance

logP-H diagram



Copyright © 2005 MegaWatSoft

Excel Chart generated with
Steam97 Excel Add-In