
Devoir de contrôle en mathématiques

Problème

PARTIE 1 (9 points)

I) Etudier la convergence et la convergence absolue de la série numérique: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

II) On considère les suites α_n et β_n définies par:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \log(n+1) \leq \alpha_n \leq 1 + \log n$.

3. En déduire que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \log n$.

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (\beta_{n+1} - \beta_n)$ est convergente.

5. En déduire qu'il existe un réel γ (constante d'Euler) telque $\alpha_n \underset{+\infty}{=} \log n + \gamma + o(1)$.

III) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1, \quad T_{2n} = \alpha_n - \alpha_{2n} = \beta_n - \beta_{2n} - \log 2$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

PARTIE 2 (9 points)

I) Soient p, q deux réels et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par: $g(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x^q}$.

Discuter suivant les valeurs de p et q l'intégrabilité de la fonction g .

II) On suppose dans toute la suite que p et q sont des réels stricts positifs.

1. Montrer que $\forall x \in]0, 1[,$ la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{p+kq-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

On notera respectivement $S_n(x)$ et $R_n(x)$ la somme partielle et le reste d'ordre n de cette série.

2. Donner l'expression de $S_n(x)$ et $R_n(x)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1[, |S_n(x)| \leq 2x^{p-1}$.
4. En déduire que la fonction $S_n(x)$ est intégrable sur $]0, 1[$.
5. Montrer que:
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{p+kq} + \int_0^1 R_n(x) dx.$$
6. Montrer que:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_n(x) dx = 0.$$
7. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{p+kq} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx.$$
8. Calculer la valeur des sommes:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

PARTIE 3 (2 points)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ définie par:

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall x \in]n-1, n] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Tracer la courbe de f .
2. On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrer que: $\forall x \geq 1, F(x) = \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{(-1)^k}{k} + \int_{E(x)}^x f(t) dt$
où $E(x)$ désigne la partie entière de x . (Rappelons que: $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$).
3. Montrer que:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{E(x)}^x f(t) dt = 0.$$
4. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.