

Devoir de Synthèse (Analyse) n. 1

Durée : 2 heures

Partie I. On considère $I =]-1, +\infty[$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in I, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}. \quad \text{Posons} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

- 1) Montrer que S est définie continue sur I .
- 2) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I .

(Indication : On pourra utiliser sans démonstration que $\forall p \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{n+x}\right)^{(p)} = (-1)^p \frac{p!}{(n+x)^{p+1}}.$

- 3) En déduire que S est de classe C^∞ sur I .
- 4) Justifier que S est croissante et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$.
- 5) Simplifier pour $x \in I$ l'expression de $S(x+1) - S(x)$
- 6) En déduire qu'au voisinage de $(-1)^+$,

$$S(x) \sim -\frac{1}{1+x}$$

Partie II. On désigne dans cette partie pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n(x) = \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)}.$

- 1) En simplifiant $\frac{U_n(x)}{U_{n-1}(x)}$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} (\text{Log} U_n - \text{Log} U_{n-1})$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- 2) En déduire que la suite de fonctions $(U_n(x))_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction strictement positive notée $\Gamma(x)$.

On se propose dans la suite de montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

- 3) Soit $x > 0$. On pose pour $n \geq 1$, $H_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}\right) - \text{Log}(n)$.
 - a) Montrer que la suite (H_n) converge vers une constante γ appelé la constante d'Euler.
 - b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] = \frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

- c) En déduire la formule de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] \right)$$

4) Prouver que pour tout $x > 0$,

$$\text{Log}(\Gamma(x)) = -\gamma \cdot x - \text{Log}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)$$

5) Pour $x > 0$ et $n \geq 1$, on pose : $g_n(x) = \frac{x}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = S(x)$.

b) En déduire que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + S(x)$.

6) En utilisant la partie I, déduire alors que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

(Indication : On pourra justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma \in \mathcal{C}^n(]0, +\infty[)$.)

Partie III. On fixe dans cette partie un réel $x > 0$.

On se propose dans la suite de donner une autre expression de $\Gamma(x)$.

On considère l'application définie sur $]0, +\infty[$ par $h(t) = t^{x-1}e^{-t}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$h_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \quad \text{si } 0 < t \leq n \quad \text{et} \quad h_n(t) = 0 \quad \text{si } t \geq n.$$

1) Montrer que h est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Prouver que la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers h .

3) Vérifier que pour tout $u \geq 0$, $1 - u \leq e^{-u}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, \quad |h_n(t)| \leq h(t)$.

4) Déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

5) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

6) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

7) Déduire de la partie II que :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

8) On rappelle que $h(t) = t^{x-1}e^{-t}$ où x est un réel fixé strictement positif.

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{n+x-1}}{n!}$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers h .

b) En déduire par le théorème d'intégration terme à termes que

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

c) Prouver qu'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$.

9) Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty.$$